Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2010, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2010/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EML MATS

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 2010 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Définitions et notations

• p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

• On note $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

• On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1,...,p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.

• On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1,...,p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j.

• On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2$, $(A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.

• On dit qu'une suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1,...,p\}$, $(L_n)_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (L)_j$.

• On admet que, si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice AB.

• On admet que si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice LA.

• On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,...,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,...,p\}, \ |x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = \mathrm{I}_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie **II**, on suppose qu'il existe $r \in \{1,...,p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \Delta$ et en déduire : $B_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} B$.

4. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \in \mathcal{ST}_p$.

b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \Big(\mathrm{P}(X_n = 1)\ \ \mathrm{P}(X_n = 2)\ \ \mathrm{P}(X_n = 3)\Big)$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ \ (A)_{i,j} = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ \ \mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie **I.3**, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geqslant 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\ ,\quad \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3. Montrer : $\forall x \in J,\ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \ \forall t \in]0\,;1],\ \ \big(\, x \leqslant y \implies t^x \geqslant t^y \,\big)$.

b. En déduire que f est décroissante sur J.

5. Montrer : $\forall x \in J,\ \ f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

6. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

7. Soit $x \in J$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b. En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

8. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

b. En déduire que f est continue sur J.

9. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe C^2 de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

1. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\,g_k'(x)\right| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

2. **a.** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\ \ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c. Déterminer $f'(0)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Réels, sommes et produits
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg