Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2010, filière ECG

Mathématiques I ESSEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U
- II. Comportement asymptotique de U(f) au voisinage de +infini
- III. Convergence absolue de l'intégrale de U(f)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2010/maths-s-essec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

281

Concepteur : ESSEC

ESSECMATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[1,+\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $C^1(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E, on dit qu'une fonction y de $C^1(I,\mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$,

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I, puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problèmes traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U.

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. *Etude de l'équation* (E_f)

a) On considère $f \in E$ et $y \in C^1(I,\mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I$, $y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right)$.

b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I, celle-ci est unique.

c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est convergente.

d) Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. *Linéarité de U*

a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

c) U est-il injectif ?

d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)dt$.

3. *Cas des fonctions exponentielles*

a) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\mathrm{Ker}(U - \lambda id_E) \neq \{0\}$.

c) Pour tout entier naturel n, expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I, préciser $\lim_{n\to\infty}\left[U^n(f_k)\right](x)$.

4. *Cas des fonctions sinus et cosinus*

Dans cet exemple seulement (ensemble de la question I-4), on prendra $a = 1$.

a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.

b) Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions *sin* et *cos* est stable par U et que (*sin*, *cos*) en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : \begin{cases} P \to P \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$.

c) Calculer M^2, M^3, M^4. Expliciter M^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. *Une autre famille de fonctions*

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

a) Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.

b) Pour p entier naturel, montrer que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

c) On prend ici $p = 2$, écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 \to F_2 \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$. Calculer T_2^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. *Une autre expression de $U(f)$*

Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I$, $U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)dt$.

7. *Positivité de U*

a) Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

b) Montrer que ψ est à valeurs positives.

c) On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. *Commutation de U avec la dérivation*

On note $E_1 = \{f \in E \cap C^1(I,\mathbb{R}) / f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1, associe sa dérivée.

a) Pour f un élément de E_1, montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.

b) En déduire que, pour tout élément f de E_1, $D(U(f)) = U(D(f))$.

c) Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question **7.c)** : $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. *Résultats préliminaires*

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I. On suppose que, $\forall x \in I$, $\beta(x) > 0$, et que $\int_1^{+\infty} \beta(t)dt$ converge.

a) On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists A > 0 / \forall x \geq A$, $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt\right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$. Conclure.

b) On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$, montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$.

2. *Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$*

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (*on pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$ en écrivant, dans ce cas, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ et en utilisant la question* **1.**).

3. *Cas des fonctions puissances*

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

a) Montrer que $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$.

b) Montrer que pour tout x de I : $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!}(x^k - 1)$ (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :

$$g_1(x) = e^{ax}\left\{-\ln x - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k.k!}\left(x^k - 1\right) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ut}}{t} dt\right\}.$$

4. *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω*

On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.

a) Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de +∞, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de +∞.

b) Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de +∞, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de +∞.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty} \left|\left[U(f)\right](t)\right| dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

1. *Etudes d'exemples*

a) Pour k un réel strictement positif et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente.

b) Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω, $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ est-elle convergente ?

2. *Cas des fonctions positives*

Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

On note $F : x \in I \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \int_1^x g(t) dt$.

a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.

b) Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = K e^{ax} + \left[U(F)\right](x) - \frac{g(1)}{a}$.

c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

d) En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$.

e) Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

3. *Cas général*

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg