Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2011, filière ECG

Mathématiques II ESSEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 - Description et premiers résultats
- Partie 2 - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes
- Partie 3 - Distance variationnelle à la loi uniforme
- Partie 4 - Une majoration de P(T > n)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2011/maths-e-essec-2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Concepteur : ESSEC

Code épreuve :

287

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 9 mai de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Une question que se pose un joueur de cartes est de savoir combien de fois il est nécessaire de battre les cartes pour que le paquet soit convenablement mélangé. Ce problème décrit un procédé très élémentaire pour mélanger les cartes et propose de répondre alors à cette question.

Considérons un jeu de N cartes numérotées de C_1 à C_N et disposées en un paquet sur une table. Un joueur bat les cartes et repose le paquet sur la table. Le résultat du mélange est une permutation de ces N cartes.

Notations et Rappel : on note $\mathcal{S}_N$ l'ensemble des permutations possibles pour ce paquet de N cartes et on rappelle que $\text{card}(\mathcal{S}_N) = N!$

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $\Omega = \mathcal{S}_N$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$ l'ensemble des parties de $\mathcal{S}_N$ et $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité sur Ω. Pour toute variable aléatoire X on notera $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X lorsqu'elles existent.

On considère qu'un paquet est *convenablement mélangé* lorsque toutes les permutations sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_N$ la probabilité que le tas de cartes se trouve dans la configuration σ vaut $1/N!$

Vocabulaire et notations :
Une carte située au sommet de la pile est dite *en position n° 1*, celle qui se trouve immédiatement en dessous est dite *en position n°2*, etc. Ainsi une carte située en position n°N désigne la carte située en bas de la pile. On prendra garde à bien distinguer la position d'une carte dans le paquet du numéro qu'elle porte.

Partons d'un tas de cartes rangées initialement dans l'ordre suivant :
pour tout i élément de $[1,N]$, la carte C_i se trouve en position i.
Ainsi, à l'instant initial, la carte C_1 se trouve sur le dessus du paquet alors que C_N se trouve donc tout en dessous du paquet.

Pour k élément de $[\![1,N]\!]$, on appelle *insertion à la k-ième place* l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre la k-ième et la $(k+1)$-ième place. Une insertion à la première place ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la N-ième place consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet.

Le *battage par insertions* du jeu de cartes consiste à effectuer une suite d'insertions aléatoires, en choisissant, à chaque instant, au hasard uniformément dans $\{1,\cdots,N\}$ la place à laquelle l'insertion a lieu, indépendamment des insertions précédentes.
Les instants successifs d'insertions seront notées $1,2,\ldots,n,\ldots$, l'instant initial est $n=0$.

Notations. Nous notons :

- T_1 le premier instant où la carte située sur le dessus du paquet est glissée en dernière position, c'est-à-dire le premier instant où la carte C_N se trouve remontée de la position N à la position $N-1$,
- T_2 le premier instant où la carte C_N se trouve remontée en position $N-2$,
- et plus généralement, pour i dans $[\![1,N-1]\!]$, T_i le premier instant où la carte C_N atteint la position $N-i$,
- On posera également $\Delta_1 = T_1$ et $\forall\, i \in [\![2,N-1]\!]$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$.
- Enfin, on notera $T = T_{N-1} + 1$.

On admet que les conditions de l'expérience permettent de faire l'hypothèse que les variables aléatoires $(\Delta_i)_{i\in[\![1,N-1]\!]}$ sont indépendantes.

Description d'un exemple. Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons les résultats d'une expérience faite sur un paquet de $N=4$ cartes. La première ligne du tableau indique les instants n, la deuxième ligne indique les positions d'insertions, et dans la dernière ligne figure la configuration du paquet à l'instant n.

	instant n	0	1	2	3	4	5	6	7
	insertion en place k		3	2	4	1	3	4	2
Configuration du paquet	position 1	C_1	C_2	C_3	C_2	C_2	C_1	C_4	C_2
	position 2	C_2	C_3	C_2	C_1	C_1	C_4	C_2	C_4
	position 3	C_3	C_1	C_1	C_4	C_4	C_2	C_3	C_3
	position 4	C_4	C_4	C_4	C_3	C_3	C_3	C_1	C_1

Pour cette expérience, on a les résultats $T_1(\omega)=3$, $T_2(\omega)=5$ et $T_3(\omega)=6$ et $T(\omega)=7$.

Partie 1 - Description et premiers résultats

1) Justifier que $\forall i \in [\![2,N-1]\!]$ $T_i = \Delta_1 - \Delta_2 + \cdots + \Delta_i$.
Que représente l'intervalle de temps Δ_i ?
2) Loi de Δ_1.
Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\Delta_1 > n)$ et reconnaître la loi de Δ_1.
3) Soit $i \in [\![2,N-1]\!]$. Loi de Δ_i.

   (a) Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$. En déduire que Δ_i suit une loi usuelle que l'on précisera.

(b) En déduire $E(\Delta_i) = \dfrac{N}{i}$ et $V(\Delta_i) = N\dfrac{N-i}{i^2}$.

4) Loi de T_2. Soit $n \geq 2$.

(a) Démontrer que $\mathbf{P}(T_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\Delta_2 = n-k)\mathbf{P}(\Delta_1 = k)$.

(b) Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right]$.

(c) En déduire que l'on a : $\mathbf{P}(T_2 = n) = \frac{2}{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]$.

5) À l'instant T_2, la carte C_N est située en position $N-2$ et deux cartes se trouvent sous elle qui ont été insérées aux instants T_1 et T_2.
Que valent alors les probabilités, qu'à l'instant T_2 :

(a) la carte insérée à l'instant T_1 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_2 en place N ?

(b) la carte insérée à l'instant T_2 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_1 en place N ?

6) À l'instant T_3, la carte C_N est située en position $N-3$ et trois cartes, insérées aux instants T_1, T_2 et T_3, se trouvent sous elle. On note alors, pour $i \in \{1,2,3\}$, a_i la position de la carte ayant été insérée à l'instant T_i.

(a) Combien y a-t-il de résultats possibles pour le triplet (a_1,a_2,a_3) ?

(b) Quelques exemples. Donner les probabilités qu'à l'instant T_3 :

i) on obtienne $(a_1,a_2,a_3) = (N-2,N-1,N)$?

ii) on obtienne $(a_1,a_2,a_3) = (N-2,N,N-1)$?

7) Justifier la phrase suivante :

"À partir de l'instant T, toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables."

On retiendra que si on arrête le battage des cartes par insertion exactement à l'instant T, on a un paquet convenablement mélangé. *Cependant le temps T étant aléatoire, il n'est pas possible d'arrêter de battre les cartes à cet instant précis, à moins de marquer la carte C_N bien sûr !*

Partie 2 - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes

Notations : on introduit les suites $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \geq 1 \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n - \ln(n)$$

8) Espérance et variance de T

Justifier que $E(T) = NH_N$ et que $V(T) = N^2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right) - NH_N$.

9) Étude de la suite (u_n)

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$.

(b) En déduire successivement :

i) la décroissance de la suite (u_n),

ii) l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

(c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, notée γ appartient à $[0,1]$.

10) (a) Établir que $E(T) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln(N)$ et $E(T) = N\ln(N) + N\gamma + o(N)$.

(b) Quelle est la nature de la suite $\left(\frac{V(T)}{N^2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$? *(on prendra garde au fait que $V(T)$ dépend de N).*
Justifier qu'il existe une constante α, strictement positive, telle que

$$V(T) \underset{N\to\infty}{\sim} \alpha N^2 \text{ et } V(T) \leq \alpha N^2$$

11) Écart à la moyenne
On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev valable pour une variable aléatoire X admettant une espérance et une variance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) < \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit N fixé et une constante c strictement plus grande que 1.

(a) Justifier que $\forall \omega \in \Omega,\ |T(\omega) - N\ln(N)| \leq |T(\omega) - E(T)| + N$.
Comparer par une inclusion les événements suivants

$$\Big(|T - N\ln(N)| \geq cN\Big) \text{ et } \Big(|T - E(T)| \geq N(c-1)\Big)$$

(b) Démontrer que

$$\mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geq cN\Big) \leq \frac{\alpha}{(c-1)^2}$$

où α a été définie à la question 10b.
Le nombre N étant fixé, que vaut $\lim\limits_{c\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln N| \geq cN\Big)$?

12) Démontrer aussi que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\Big(|T - N\ln(N)| \geq \varepsilon N\ln(N)\Big) = 0$$

On peut traduire ces résultats en disant que l'événement : "T s'écarte de $N\ln(N)$ de manière significative" est un événement asymptotiquement rare.
Pour information, pour un paquet de 32 cartes, on donne $32\ln(32) \simeq 110$ et pour un paquet de 52 cartes, $52\ln(52) \simeq 205$.

13) Simulation informatique. Dans cette question on considère un jeu de $N = 32$ cartes.
MODÉLISATION : On définit en PASCAL le `TYPE Paquet=ARRAY[1..32] OF INTEGER;` Le paquet de 32 cartes est représenté par une variable Jeu de `TYPE Paquet` rempli initialement d'entiers entre 1 et 32; donc, initialement, `Jeu[i]` contient i, c'est à dire que la carte C_i est en position i. Au cours des insertions, `Jeu[i]` désigne le numéro de la carte en position numéro i. Par exemple, `Jeu[i]=10` signifie que la carte C_{10} est en position i.
On indique à la fin de cette question un extrait de programme à compléter en suivant les questions suivantes :

(a) Écrire la procédure `Init` permettant de définir une variable `Jeu` correspondant à la configuration initiale du paquet de cartes.
(b) Compléter la procédure `Insertion` qui simule une opération d'insertion. On rappelle que la fonction `RANDOM(32)` permet de tirer un nombre entier au hasard dans l'intervalle $[\![0,31]\!]$.
(c) Que fait la fonction `T`?
(d) Écrire le programme principal permettant de calculer et d'afficher la moyenne des valeurs prises par la fonction `T` sur 100 expériences et compléter la ligne de déclaration de variables.

Extrait du programme.

```
PROGRAM ESSEC2011;
TYPE Paquet=ARRAY[1..32] OF INTEGER;
VAR Jeu :Paquet;
    ..............    (à compléter)

PROCEDURE Init( ..............)


PROCEDURE Insertion(VAR Jeu :Paquet);
VAR i,k,cartedessus :INTEGER;
BEGIN
   k := .......   (position où on va insérer la carte du dessus)
   cartedessus :=Jeu[1];
   IF k>1 THEN FOR i :=1 TO k-1 DO Jeu[i] := ....
   Jeu[k] := ....
END;

FUNCTION T(Jeu :Paquet) :INTEGER;
VAR n :INTEGER;
BEGIN
   Init(Jeu);
   n :=0;
   WHILE Jeu[1]<>32 DO
   BEGIN
      Insertion(Jeu);
      n :=n+1
   END;
   T :=n
END;

BEGIN  { programme principal }

END.
```

Partie 3 - Distance variationnelle à la loi uniforme

Notations :

• On note π l'équiprobabilité sur $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$ dans $[0,1]$ telle que :

$$\forall A \subset \mathcal{S}_N \quad \pi(A) = \frac{\text{card}(A)}{N!}\text{; en particulier, } \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \quad \pi(\{\sigma\}) = \frac{1}{N!}$$

• On note également μ_n la probabilité sur $\mathcal{S}_N$ définie comme suit :
pour chaque configuration σ de $\mathcal{S}_N$, $\mu_n(\{\sigma\})$ désigne la probabilité qu'à l'instant n le tas de cartes se trouve dans la configuration σ.
On a alors pour pour toute partie A de $\mathcal{S}_N$, $\mu_n(A) = \sum_{\sigma \in A} \mu_n(\{\sigma\})$.

On peut mesurer la qualité du mélange à un instant donné n en estimant l'écart entre μ_n et π. Une *distance* d entre ces probabilités est définie de la manière suivante :

$$d(\mu_n, \pi) = \max\left\{ |\mu_n(A) - \pi(A)|, A \subset \mathcal{S}_N \right\}$$

14) Soient A une partie de $\mathcal{S}_N$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'événement : "à l'instant n le paquet de cartes se trouve dans une configuration qui appartient à la partie A."

(a) Expliquer, en utilisant la question 7, l'égalité suivante : $\mathbf{P}_{(T \leq n)}(E_n) = \pi(A)$.
En déduire $\mathbf{P}(E_n \cap (T \leq n)) = \pi(A)\mathbf{P}(T \leq n)$.

(b) Établir que $\mathbf{P}(E_n \cap (T > n)) \leq \mathbf{P}(T > n)$.

(c) Montrer que

$$\mu_n(A) \leq \pi(A) + \mathbf{P}(T > n)$$

15) Soit A une partie de $\mathcal{S}_N$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

(a) Exprimer $\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A})$ en fonction de $\mu_n(A)$ et $\pi(A)$.

(b) Déduire des questions précédentes la majoration :

$$|\mu_n(A) - \pi(A)| \leq \mathbf{P}(T > n)$$

16) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d(\mu_n, \pi) \leq \mathbf{P}(T > n)$. Déterminer la limite $\lim_{n \to +\infty} d(\mu_n, \pi)$.

Partie 4- Une majoration de $\mathbf{P}(T > n)$

Dans cette partie, nous nous intéressons provisoirement à un collectionneur de timbres. Celui-ci reçoit chaque jour une lettre affranchie avec un timbre choisi au hasard uniformément parmi les N timbres en vigueur. On étudie ici le nombre de jours que doit attendre le collectionneur pour posséder la collection complète des N timbres. Le jour 0 il n'a aucun timbre.

On note alors :

- pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$, S_k le nombre aléatoire de jours que doit attendre le collectionneur pour que le nombre de timbres différents qu'il possède passe de $k-1$ à k,
- $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$, soit la variable aléatoire correspondant au nombre de jours à attendre pour posséder la collection complète des N timbres,
- en supposant les N timbres en vigueur numérotés de 1 à N, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, B_j^m l'événement "le jour m, le collectionneur n'a toujours pas reçu de lettre affranchie avec le timbre numéro j."

On admet que les variables aléatoires $(S_k)_{k \in [\![1,N]\!]}$ sont indépendantes.

17) Déterminer la loi de S_1.

18) Déterminer pour tout entier $k \in [\![2, N]\!]$ la loi de la variable S_k.

19) En déduire que la variable S suit la même loi de probabilité que la variable T étudiée dans les parties précédentes.
Ce résultat sera utilisé pour estimer la quantité $\mathbf{P}(T > n)$.

20) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer l'événement $(S > m)$ à l'aide des événements B_1^m, B_2^m, ..., B_N^m.

(b) Que vaut $\mathbf{P}(B_j^m)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$?

(c) On rappelle que pour tout entier $n \geq 2$ et pour toute famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$, on a l'inégalité : $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ En déduire $\mathbf{P}(S > m) \leq N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m$.

21) (a) Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

(b) Déduire des résultats précédents la majoration

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(T > m) < Ne^{-\frac{m}{N}}$$

22) On reprend les notations introduites dans la partie précédente.

(a) Soit $c > 0$ fixé. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à $N \ln N + cN$ on a : $d(\mu_n, \pi) < e^{-c}$.

(b) *Application numérique.* On estime qu'une distance en variation à la loi uniforme de 0,2 est acceptable.
Avec un jeu de 32 cartes, combien de *battages par insertions* doit-on faire pour considérer le paquet mélangé de façon acceptable ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Réels, sommes et produits
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg