Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2012, filière ECG

Mathématiques approfondies EDHEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2012/maths-appro-edhec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve : 297

Conception : EDHEC

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   b) En déduire les valeurs propres de f.
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.

   b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.

On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note *Id* l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-x X_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - x X_0$, la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} \text{ si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \text{ si } z \geq 0 \end{cases}$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \operatorname{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0)$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(X = n)$ et $(Z = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est "**function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division par $1+X^3$ du polynôme $(1-X+X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Im}f$.
   c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}f$.
3) a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}f$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}(f-3Id)$$
   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Vérifier que $\mathrm{Ker}f$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}f$ dans E pour ce produit scalaire.
5) a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ puis retrouver le résultat de la question 4b).

Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \,,\; T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\,x_i$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = \dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

   b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,.$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\, x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{1}{k})^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln x\, dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ -1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.
Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Algèbre bilinéaire
- Polynômes
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg