Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2012, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, parties I et II : interpolation polynomiale et polynômes spéciaux
- Problème 1, parties III et IV : matrices symétriques positives et équation P(S) = A
- Problème 2, partie I : formule de Stirling
- Problème 2, partie II : étude de variables aléatoires

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2012/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Code épreuve : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2012 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0\,;+\infty[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.
On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = \big(P(a_1), ..., P(a_n)\big).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire que, pour tout $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. *Exemple :*
Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \big(P(x) > 0 \ \text{ et } \ P'(x) > 0\big).$$

1. Donner un exemple d'élément de E.

2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E,\quad P+Q \in E,\quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $P \in E$. On note $\quad P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$
Montrer : $\quad P_1 \in E.$

4. Soit $P \in E$. Montrer : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad P(x) \geqslant P(0).$

Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0\,;+\infty[\longrightarrow [P(0)\,;+\infty[,\quad x \longmapsto \widetilde{P}(x) = P(x).$

5. Montrer que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.

6. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathbf{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^tUAU \geqslant 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

2. a. Montrer que si A est dans $\mathbf{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$.

b. Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$, alors A est dans $\mathbf{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie **II**), et soit $A \in \mathbf{S}_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, ..., \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0)\,;+\infty[$.
On note D la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, ..., \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.
On se propose de résoudre l'équation $\quad P(S) = A,\quad$ d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathbf{S}_n^+$.
Soit S appartenant à $\mathbf{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.

a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.

b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

2. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), ..., \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\widetilde{P}$ a été définie dans la partie II.

3. *Exemple :*

On prend ici $n = 4$, $P = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier $P \in E$.

b. Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in \mathbf{S}_4^+$.

c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.

d. Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_4^+$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. **a.** Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n > 0$.

3. **a.** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.

4. **a.** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

b. En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. **a.** Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}$.

b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

4. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et calculer $\mathrm{V}(X)$.

5. a. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0\,;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b. En déduire un programme en langage Pascal, utilisant le générateur aléatoire Pascal, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

6. Justifier : $\mathrm{P}(T_n > n+1) = 0$.

7. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$: $\mathrm{P}(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$.

Soit $y \in [0\,;+\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

8. Justifier : $\mathrm{P}(Y_n > y) = \mathrm{P}(T_n > k_n)$.

9. En utilisant **I 9.b.**, montrer : $\mathrm{P}(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.

10. a. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \longmapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

b. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)\right) = -\dfrac{y^2}{2}$.

11. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Polynômes
- Compléments d'algèbre linéaire
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Dérivation (et convexité en ECT1)

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg