Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2013, filière ECG

Mathématiques appliquées emlyon

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie ressaisie du sujet officiel, sans page de garde ni code d'épreuve, avec l'en-tête ajouté « Lyon 2013 voie E » ; la durée de 4 heures n'y figure pas et la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2013/maths-appli-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Lyon 2013 voie E

EXERCICE 1

Partie I- Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0;1]$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$

Partie II- Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
   Est-ce que f est continue en 1 ?
2. Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
3. Montrer que f est une densité.
4. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0;1[$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0;1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.
   (c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie.

Partie III- Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie **II**) et on note F la fonction de répartition de X.

1. Calculer, pour tout $x \in]0;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   (On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **I.2.**)
2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie III- Etude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0; +\infty[^2$ tels que : $x + y < 1$ et $2x < 1$.
On considère l'application $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert D, définie, pour tout $(x, y) \in D$, par :

$$G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2} f(2x)$$

1. Représenter l'ensemble D.
2. Calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y), en fonction de x, y, f'.
3. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$f'(2x) = 0 \text{ et } f'(x + y) = 0$$

4. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en **II 4.b.**.
5. Est-ce que G admet un extremum local ?

EXERCICE 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

   On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

   $$AM = MA.$$

   On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

   $$DN = ND.$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

   $$M \in C_A \iff N \in C_D$$

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.
7. En déduire :

   $$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathrm{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
   En déduire $\mathrm{E}(Z_1)$ et $\mathrm{E}(Z_2)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   (c) En déduire : $\mathrm{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_k) + 1$.
3. (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathrm{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathrm{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k \geq 5)$.
2. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $[\![1; 4]\!]$, A_i l'événement :
   " la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages".
   (a) Montrer : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathrm{P}(A_1) - 6\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   (c) En déduire : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $\mathrm{P}(Z_k = 3)$ et $\mathrm{P}(Z_k = 4)$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires à densité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Éléments propres et réduction
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg