Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2013, filière ECG

Mathématiques II ESSEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I. Lien entre loi binomiale et loi de Poisson
- II. Modélisation de la concentration en bactéries
- III. Construction d'une procédure de test

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2013/maths-e-essec-2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Code épreuve : 287

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 7 mai de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet du problème est l'étude de la concentration en un type de bactéries d'un bassin destiné à la baignade. Une municipalité doit effectuer un prélèvement et l'analyser afin de décider d'autoriser ou non l'utilisation du bassin.

Dans une première partie, on étudiera des propriétés reliant la loi binomiale et la loi de Poisson. Dans une deuxième partie, on regardera la modélisation de la concentration en bactéries du bassin. Enfin, la troisième partie étudiera le principe d'un test destiné à prendre une décision d'utilisation.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment en admettant les résultats des parties précédentes.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si elles existent, on note $E(T)$ et $V(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.

I Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

1) Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$.

(a) Quelle est la loi de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$?

(b) Soit k un entier naturel.

i) Donner l'expression de $P(S_n = k)$ pour n supérieur ou égal à k.

ii) Que peut-on dire de la limite de p_n quand n tend vers l'infini ? Etudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend vers l'infini.

iii) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Tournez la page S.V.P.

(c) On pose $N_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

i) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n ?

ii) Calculer $\lim_{n \to +\infty} P(N_n = 0)$

iii) En déduire la limite en loi de la suite (N_n).

2) Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leq n$. On considère U une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On a donc $P(U = 1) = \frac{\lambda}{n}, P(U = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n}$ et pour tout i entier naturel supérieur ou égal à 2, $P(U = i) = 0$.

(a) Montrer que pour tout réel positif u, $1 - u \leq \mathrm{e}^{-u}$

(b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = \frac{2\lambda}{n}[1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}]$$

(c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \leq 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

3) Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leq n$. Soient Z, U et V trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et que V suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On observe en particulier que pour tout entier p strictement négatif

$$P(Z = p) = P(U = p) = P(V = p) = 0.$$

(a) Soit i un entier naturel fixé. En remarquant que pour pour tous réels a et b, on a : $| a - b | \leq | a | + | b |$, montrer que la série de terme général $| P(U = k - i) - P(V = k - i) |$ (où k décrit $\mathbb{N}$) est convergente.

On note A_i sa somme : $A_i = \sum_{k=0}^{\infty} | P(U = k - i) - P(V = k - i) |$.

Montrer que pour tout i on a : $A_i \leq 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$.

(b) Montrer que la série de terme général $A_i \times P(Z = i)$ est convergente.

(c) Soit k un entier naturel fixé.

Montrer que la série de terme général $| P(U = k - i) - P(V = k - i) | \times P(Z = i)$ (où i décrit $\mathbb{N}$) est convergente.

(d) On pose $B_k = \sum_{i=0}^{\infty} | P(U = k - i) - P(V = k - i) | \times P(Z = i)$.

i) Montrer que pour $k \geq 2$, on a

$$B_k = \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| P(Z = k) + \left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| P(Z = k - 1) + \sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i) P(Z = i)$$

ii) Justifier que pour $k \geq 2$, on a

$$\sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i) P(Z = i) \leq P(V + Z = k)$$

iii) Montrer finalement que la série de terme général B_k (où k décrit $\mathbb{N}$) est convergente.

On admettra alors qu'on a : $\sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \times P(Z=i)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mid P(U=k-i) - P(V=k-i) \mid \times P(Z=i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mid P(U=k-i) - P(V=k-i) \mid\right) \times P(Z=i)$$

4) On conserve dans cette question les notations et les hypothèses de la question 3 concernant les variables aléatoires Z, U et V.

(a) Montrer que la série de terme général : $\mid P(Z+U=k) - P(Z+V=k) \mid$ est convergente.

(b) Déduire de la question 3 que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mid P(Z+U=k) - P(Z+V=k) \mid \leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mid P(U=k-i) - P(V=k-i) \mid \times P(Z=i)$$

puis que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mid P(Z+U=k) - P(Z+V=k) \mid \leq 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

5) Soient $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ $2n$ variables aléatoires indépendantes telles que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $(\frac{\lambda}{n})$ et V_i suit une loi de Poisson de paramètre $(\frac{\lambda}{n})$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a

$$\mid P(U_1 + \ldots + U_n = k) - P(V_1 + \ldots + V_n = k) \mid \leq$$

$$\mid P(U_1 + \ldots + U_n = k) - P(U_1 + \ldots + U_{n-1} + V_n = k) \mid +$$

$$\mid P(U_1 + \ldots + U_{n-1} + V_n = k) - P(U_1 + \ldots + U_{n-2} + V_{n-1} + V_n = k) \mid +$$

$$\ldots + \mid P(U_1 + V_2 + \ldots + V_n = k) - P(V_1 + \ldots + V_n = k) \mid$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mid P(U_1 + \ldots + U_n = k) - P(V_1 + \ldots + V_n = k) \mid \leq \frac{2\lambda^2}{n}$$

(c) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$. Conclure de ce qui précède que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(X=k) - \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{2\lambda^2}{n}$$

II Modélisation de la concentration en bactéries

Le bassin qu'on étudie est supposé de volume V (en m^3) et on effectue un prélèvement de volume ΔV (en m^3). Dans cette situation, la probabilité pour qu'une bactérie spécifique du bassin se trouve dans le prélèvement est égale à $\frac{\Delta V}{V}$.

Supposons que le bassin contienne n bactéries numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère alors n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs 0 ou 1 telles que $X_i = 1$ si la bactérie i se trouve dans le prélèvement et 0 sinon. Les variables en question sont supposées indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

On pose $c = \frac{n}{V}$ qui représente la concentration en bactéries du bassin par m^3.

6)

(a) Quelle est la loi de X_i pour $1 \leq i \leq n$?

(b) Soit N le nombre de bactéries présentes dans le prélèvement. Montrer que N suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{\Delta V}{V}$.

7) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On appelle F sa fonction de répartition.

Ecrire en PASCAL une fonction d'en-tête

```
FUNCTION Poisson(x,lambda :REAL) :REAL;
```

qui a pour résultat $F(x)$.

On s'attachera à minimiser le nombre d'opérations.

8) Soit U une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $c\Delta V$. Soit $K \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) Montrer que

$$| P(N \leq K) - P(U \leq K) | \leq \frac{2c(\Delta V)^2}{V}$$

(b) On suppose que $V = 1000$ m^3 et que le prélèvement est de volume ΔV égal à 1 litre (soit 10^{-3} m^3). Trouver un majorant de l'erreur commise en approximant $P(N \leq K)$ par $P(U \leq K)$.

(c) On suppose que la concentration dans le bassin reste inférieure à 10^6 bactéries par mètre cube, et que le prélèvement réalisé est encore de 1litre. Quelle est la valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure à 10^{-6} ?

On admettra que le résultat de la question 5.c) peut être amélioré de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(X = k) - \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{2\lambda \min(\lambda, 2)}{n}$$

(d) Montrer que si U suit une loi de Poisson de paramètre $c\Delta V$,

$$| P(N \leq K) - P(U \leq K) | \leq 4\frac{\Delta V}{V}$$

(e) On suppose toujours que le prélèvement réalisé est de un litre. A l'aide de l'inégalité précédente, trouver la valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure à 10^{-6}.

III Construction d'une procédure de test

Un prélèvement est réalisé et mis en culture pendant 24 heures. Les bactéries se multiplient et on obtient ainsi une concentration plus importante et plus facile à estimer. On conserve les notations de la partie précédente et on posera $\lambda = c\Delta V$. En outre, on définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ (1+x)\ln(1+x) - x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

9) Déterminer les variations de la fonction h sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et préciser le signe de h.

10) En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff, démontrer l'inégalité de Markov : si Y est une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $E(Y)$, pour tout réel α strictement positif, on a

$$P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y)$$

11) Soit λ un réel strictement positif et soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit ε un réel strictement positif.

(a) Pour tout réel u, calculer $E(\mathbf{e}^{uX})$.

(b) Trouver un réel strictement positif u_0 tel que $E(\mathbf{e}^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}) = \mathbf{e}^{-\lambda h(\varepsilon)}$.

(c)

i) Montrer que pour tout $u > 0$, $P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geq \varepsilon) = P(\mathbf{e}^{u(X-\lambda)} \geq \mathbf{e}^{\lambda\varepsilon u})$.

ii) En déduire $P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geq \varepsilon) \leq \mathbf{e}^{-\lambda h(\varepsilon)}$.

(d) Montrer de même que $P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) \leq \mathbf{e}^{-\lambda h(-\varepsilon)}$ (on traitera successivement les cas $\varepsilon \geq 1$ et $0 < \varepsilon < 1$).

12) Si la concentration en bactéries est trop élevée, on doit interdire le bassin. La limite maximale de tolérance est fixée à 2000 bactéries par litre. On garde les notations de la question 11 et on suppose de nouveau que $\Delta V = 10^{-3}$ m^3 . Fixons un réel α compris entre 0 et 2000.

(a) Montrer que pour tout réel λ strictement supérieur à 2000,

$$P(X \leq \alpha) = P\left(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq \lambda^{-1}(\alpha-\lambda)\right) \leq \mathbf{e}^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1)}.$$

(b) En déduire que si λ est un réel strictement supérieur à 2000,

$$P(X \leq \alpha) \leq \mathbf{e}^{-2000 h(\frac{\alpha}{2000} - 1)}.$$

(c) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$2000 h(\frac{x}{2000} - 1) = \ln(100)$$

admet une unique solution α_0 comprise entre 0 et 2000.

(d) On admettra que $1865 < \alpha_0$. Déduire que si $\lambda > 2000$, $P(X < 1865) \leq \frac{1}{100}$.

(e) Exemple d'application : on compte 1600 bactéries dans le prélèvement de 1 litre. Que peut-on dire du risque que l'on prend en autorisant le bassin ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg