Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2014, filière ECG

Mathématiques HEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Partie I. Un équivalent d'une intégrale
- Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson
- Partie III. Médianes des variables discrètes et à densité

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2014/maths-e-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : ÉCONOMIQUE

Mercredi 30 avril 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}\,, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j}\,, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \qquad \text{(somme des coefficients des lignes)}$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}\,, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}\,, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \qquad \text{(somme des coefficients des colonnes)}$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}\,, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} \qquad \text{(somme des coefficients des diagonales)}$$

Pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $\left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.
   a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, fait correspondre le vecteur $f(A) = \left(s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A)\right)$ de $\mathbb{R}^8$.

2.a) Montrer que f est une application linéaire.
   b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Tournez la page S.V.P.

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) On note $\mathrm{Ker} f$ le noyau de l'application linéaire f. Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \mathrm{Ker} f$.

c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\mathrm{Ker} f$ et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(J)$.

d) Quel est le rang de l'application f ?

e) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker} f$.

PROBLÈME

- *La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée* Φ.
- *La notation* exp *désigne la fonction exponentielle.*
- *Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.*

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$.

a) Montrer que la fonction N est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $N'(x) \leqslant 0$.

d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\,\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.

c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2\,\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \dfrac{1}{2}\right)$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,.$$

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$.

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

e) À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = n!\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\,J_n(n)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6.a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\big([S_n \leqslant n]\big)$ et $P\big([S_n \geqslant n]\big)$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P\big([S_{n+1} \leqslant n+1]\big) - P\big([S_n \leqslant n]\big) = -\frac{1}{(n+1)!}\left(\int_n^{n+1}\big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\mathrm{d}t\right).$$

c) En déduire que la suite $\big(P\big([S_n \leqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(P\big([S_n \geqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que les deux suites $\big(P\big([S_n \leqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(P\big([S_n \geqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

8.a) Énoncer le théorème de la limite centrée et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([S_n \leqslant n]\big)$.

b) En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent et la limite de $P\big([S_n = n]\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([S_n \geqslant n]\big)$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $P\big([X \leqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P\big([X \geqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

Tournez la page S.V.P.

9. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et un type `type proba = array[1. . N] of real`. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable `loi` de type `proba`.

Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function mediane (loi :proba) :real ;` qui renvoie une médiane de X.

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\big(|X-r|\big) = E(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P\big([X=k]\big)$.

b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P\big([X=k]\big)$.

En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\big(|X-r|\big) = E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$.

c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E\big(|X-r|\big) - E\big(|X-m|\big)$. Conclure.

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

En utilisant les questions 7 et 8, justifier que n est une médiane de X.

En utilisant les questions 10.a et 8.c, montrer que $E\big(|X-n|\big)$ est équivalent à $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E\big(|X-x|\big)$.

a) Établir pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant x\big(1-F(x)\big) \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)\big) = 0$.

En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xF(x) = 0$.

b) Établir pour tout x réel, la relation : $M(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t$.

c) Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(b) - M(a) = \int_a^b \big(2F(t)-1\big)\mathrm{d}t$.

d) On note m une médiane de X. Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1218 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Variables aléatoires à densité
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg