Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2015, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, partie I : étude d'endomorphismes
- Problème 1, partie II : étude d'un produit scalaire
- Problème 2, parties I à III : transformée de Laplace
- Problème 2, partie IV : application à une équation fonctionnelle

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2015/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2015 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]\,;\, P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = \mathrm{X}(\mathrm{X}-4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on note $\phi(Q) = WQ$.

2. Montrer que l'application $\phi : Q \longmapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ sur E.

3. En déduire une base de E et la dimension de E.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(\mathrm{X}+1) - Q(\mathrm{X}).$$

Ainsi, par exemple, si $Q = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 5$, alors

$$\Delta(Q) = \big((\mathrm{X}+1)^2 - 3(\mathrm{X}+1) + 5\big) - (\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 5) = 2\mathrm{X} - 2.$$

4. **a.** Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.

c. Déterminer le noyau et l'image de Δ.

d. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application ϕ.

5. **a.** Montrer : $f \circ f \circ f = 0$.

b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

d. Est-ce que f est diagonalisable ?

PARTIE II : Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$.

On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3), \quad L_2 = (X-1)(X-3), \quad L_3 = (X-1)(X-2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. **a.** Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.

b. Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i = WL_i$.

9. **a.** Montrer que, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

On note alors, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

b. Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$: $u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i)\, N_i$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \ \forall j \in \{1,2,3\}, \ \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$.

c. En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

d. Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E.

Montrer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $\quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2\, u(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0.$

En déduire que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$: $\quad L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v).$

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}.$$

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad w_n(t) = t^n.$

Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $\quad L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}.$

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. Limite de $L(u)$ en $+\infty$

Soit u un élément de E. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A\,;+\infty[, \quad |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0\,;A], \quad |u(t)| \leqslant M.$$

Établir : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u(t)| \leqslant M + t^p$. En déduire : $\quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} L(u)(x) = 0.$

7. Limite de $L(u)$ en 0

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\, \mathrm{d}s$ converge.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\, \mathrm{d}s$.

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad R'(t) = -u(t).$

Tournez la page S.V.P.

c. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d. Soit $\varepsilon \in]0\,;+\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0\,;+\infty[$ tel que : $\forall t \in [B\,;+\infty[,\quad |R(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$.

e. Conclure : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0\,;+\infty[$ tels que : $\forall t \in [A\,;+\infty[,\quad |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b. En déduire que u appartient à E.

c. Établir : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace

Soit u un élément de E. On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\quad u_n(t) = t^n u(t).$$

a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R},\quad |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\,\mathrm{e}^{|a|}$.

c. Soient $x \in]0\,;+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.

Montrer : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\,\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$.

En déduire : $\left|\dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2|u(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$.

d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $\big(L(u)\big)'$ à l'aide de $L(u_1)$.

e. Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\big(L(u)\big)^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n)$.

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\quad u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a. Montrer que u appartient à E et : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x)$.

b. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad (x^2 + 5x + 6)\,L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3 + x$,

puis : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution du problème posé.

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1199 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Polynômes
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Variables aléatoires à densité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg