Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2015, filière ECG

Mathématiques II ESSEC (ECE)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- I. Limite inférieure d'une suite et d'une fonction
- II. Lois sous-exponentielles
- III. Problèmes de queues

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2015/maths-e-essec-2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 287

Concours d'admission de 2015

Conception : ESSEC

OPTION Economique

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 6 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. Dans la première partie, on introduit un outil d'analyse asymptotique. Dans la deuxième, on étudie un type de loi spécifique et dans la troisième des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites. Les trois parties sont **largement indépendantes**. De plus, dans les deux dernières parties, on n'utilise de la partie I que les résultats des questions 5.(f) iii) et 5.(g), qu'on pourra admettre si besoin. Dans tout l'énoncé, "positif" signifie "positif ou nul" sauf indication contraire.

I Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on notera $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z}, a \leq k \leq b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min_{i\in I} x_i$ le plus petit élément de

Tournez la page S.V.P.

l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple, $\min_{i\in[\![1,9]\!]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}$.

1) Un exemple : déterminer $\min_{i\in[\![0,4]\!]} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

2) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs.

(a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_n(k) = \min_{i\in[\![n,n+k]\!]} x_i$.

Montrer que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est décroissante.

(b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente. On note $u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k)$.

(c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geq 0}$ et est notée $\liminf_{n\to+\infty} x_n$.

3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 1 + (-1)^n, n \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$.

(b) Déterminer $\liminf_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} z_n$.

4)

(a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ alors $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell$

(b) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

(c)

i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, α_i appartient à I. Montrer que $\min_{i\in[\![1,r]\!]} \alpha_i \in I$.

ii) Démontrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall h \geq 0, \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} f(u).$$

Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$). On la nomme **la limite inférieure de** f et elle est notée $\liminf_{x\to+\infty} f(x)$.

(e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ appartient à } [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \text{ appartient à } [1,2] \end{cases}$$

et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x (on dit que f est périodique de période 2).

i) Représenter graphiquement f sur le segment [0,4].

ii) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2.

iii) En déduire Φ_x puis $\liminf_{x\to+\infty} f(x)$.

(f) f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de 5(a) et 5(b).

i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.

ii) En déduire l'inégalité

$$\Phi_x \leq f(x).$$

iii) On suppose que $\liminf_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on a $f(x) \geq \varepsilon$.

(g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x positif, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ où ℓ est un réel positif. Montrer que $\liminf_{x\to+\infty} f(x) \geq \ell$.

II Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.

Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout x positif.

6) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout n entier naturel, on pose

$$\begin{cases} p_X(n) &= P(X=n) \\ p_Y(n) &= P(Y=n) \\ p_{X+Y}(n) &= P(X+Y=n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout n entier naturel,

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_Y(n-k).$$

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et continues à droite en 0, la variable $X+Y$ admet une densité notée $f_X * f_Y$ définie, pour x positif, par

$$(f_X * f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u) f_Y(x-u) du.$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X+Y$.

7) Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

(a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

(b) Calculer $(f * f)(x)$ pour tout x positif.

(c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

(d) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$$

Tournez la page S.V.P.

8) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif, $\overline{F}(x) > 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

(a) Montrer que pour tout x positif,

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geq P(\max(X,Y) > x).$$

(b) Montrer que $P(\max(X,Y) > x) = 1 - F^2(x)$.

(c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = 2$.

(d) En déduire que $\liminf_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$.

9) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.

On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

(a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} P_{[X+Y>x]}(X > x) = \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire (en utilisant la question 8.c) que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(X+Y>x)}{P(\max(X,Y)>x)} = 1.$$

(c) Démontrer l'égalité

$$P(X+Y>x) = P([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leq x]) + P(\max(X,Y) > x)$$

(d) Conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leq x])}{P(\max(X,Y)>x)} = 0$$

(e) Interpréter le résultat précédent.

III Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x}dx = +\infty$$

10) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

11) Étude de quelques lois particulières :

(a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

(b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

i) Montrer que f est une densité de probabilité.

ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on ait $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$.

iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

(c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

i) Déterminer une densité f de X.

ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\lambda x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right]$?

iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x)e^{\lambda x} \geq 1$$

iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln \overline{F}(x)$, pour x positif.

12) Montrer que

$$\overline{F}(x) = \exp(-\int_0^x r(y)dy).$$

13) On suppose que $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, $\overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

(b) Soit λ tel que $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer que

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x)dx = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)dx$$

(c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x)dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

14) On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant l'espérance $E(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a

$$P(Z > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}E(Z).$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

(a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = E(e^{\lambda X})$ existe.

(b) Soit x strictement positif. Montrer que $\overline{F}(x) \leq c \cdot e^{-\lambda x}$.

(c) Montrer que $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geq \lambda > 0$.

Tournez la page S.V.P.

La condition $\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

15) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à [0,1], on a

$$| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 | < \varepsilon.$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

(a) Montrer que pour tout y de $[0,1]$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0.$

(b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0.$

(c) Montrer que pour tout y de $[0,1]$,

$$\lim_{x\to+\infty} P_{[X>x]}(X > x+y) = 1.$$

(d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \big(R(x+1) - R(x)\big) = 0.$

16) Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

(a) Soit λ strictement positif fixé.

i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0,1]$, on a

$$\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x) e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Indication : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

ii) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0) e^{-\lambda\frac{n}{2}}$$

iii) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) = +\infty$

(b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0.$

(d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Logique, ensembles et applications
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Variables aléatoires à densité
- Couples de variables aléatoires discrètes finies

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg