Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2015, filière ECG

Mathématiques I ESSEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Introduction
- Partie I : l'espace E_a(omega)
- Partie II : l'exemple omega = 1
- Partie III : l'hypothèse (H_omega)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2015/maths-s-essec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 281

Concours d'admission de 2015

Conception : ESSEC

OPTION Scientifique

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai 2015, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

$C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $C^k\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ désigne l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées successives jusqu'à la k-ème sont continues.

Si f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty$ le nombre réel $\max_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Si q est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par : $F(q)=\left\{f\in C^2\left([0,1],\mathbb{R}\right)/\ \forall t\in[0,1], f''(t)=q(t)f(t)\right\}$.

Tournez la page S.V.P.

Introduction

1. a) Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   b) Pour toute fonction f de $C^0([0,1],\mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :

   $\Phi(f):t\in[0,1]\mapsto\int_0^t(t-u)q(u)f(u)du$.

   Vérifier que l'application Φ, qui à f associe $\Phi(f)$, est un endomorphisme de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   c) Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^2([0,1],\mathbb{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.

   d) En déduire pour toute fonction f de $C^0([0,1],\mathbb{R})$:

   (f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0)=f'(0)=0$) si et seulement si $(\Phi(f)=f)$.

2. Soit f dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0=f$ et, pour tout n entier naturel, $f_{n+1}=\Phi(f_n)$.

   a) Montrer que : $\forall t\in[0,1],\ |f_n(t)|\le\|q\|_\infty^n\|f_0\|_\infty\frac{t^n}{n!}$.

   b) En déduire que, pour tout t de $[0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   c) Montrer alors que si f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0)=f'(0)=0$, alors f est nulle.

   d) Montrer que l'application $\Delta:\begin{cases}F(q)\to\mathbb{R}^2\\ f\mapsto(f(0),f'(0))\end{cases}$ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$?

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$.

Soient ω une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives et a un nombre réel. On note :

$E_a(\omega)=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R})/\ \forall t\in[0,1],f''(t)=-a\omega(t)f(t)\ \text{et}\ f(0)=f(1)=0\}$.

3. a) Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   b) Un exemple élémentaire : le cas $a=0$. Décrire $E_0(\omega)$.

4. Un exemple constructif : le cas ω est la fonction constante 1.

   a) Pour a strictement négatif, remarquer que $t\mapsto\exp\left(\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ et $t\mapsto\exp\left(-\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour a strictement négatif.

   b) Pour a strictement positif, remarquer que $t\mapsto\cos\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ et $t\mapsto\sin\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour a strictement positif en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a}/\pi$.

5. On revient au cas général, montrer que : $\dim\left(E_a(\omega)\right)\leq 1$. On pourra faire intervenir encore l'application Δ.
6. Montrer que : si $E_a(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors a est strictement positif (on pourra introduire $\int_0^1\left(f'(t)\right)^2 dt$).
7. Lorsque f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose : $\langle f|g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)dt$. Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur $C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

   Dans toute la suite du problème, l'espace $C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ est muni de ce produit scalaire.

   Pour f dans $C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$, on note : $\|f\|_2=\sqrt{\langle f|f\rangle}=\sqrt{\int_0^1\left(f(t)\right)^2\omega(t)dt}$.
8. Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

Partie II : l'exemple $\omega = 1$.

Dans cette partie, ω est la fonction constante 1 et p est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour tout k entier naturel non-nul, on note ψ_k la fonction définie par :
$\psi_k : t\in[0,1]\mapsto\sqrt{2}\sin(k\pi t)$.

9. a) Vérifier qu'il existe un nombre réel a strictement positif tel que ψ_k appartienne à $E_a(1)$.

   b) Pour tout couple (k,l) dans $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, calculer : $\langle\psi_k|\psi_l\rangle=\int_0^1\psi_k(t)\psi_l(t)dt$.

   c) On note G le sous-espace vectoriel de $C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ engendré par $\left(\psi_1,\ldots,\psi_p\right)$. Vérifier que $C=\left(\psi_1,\ldots,\psi_p\right)$ est une base orthonormée de G.

10. Pour g élément de G, on définit la fonction $u(g)$ par : pour tout $t\in[0,1]$,
    $\left(u(g)\right)(t)=2\cos(\pi t)g(t)-\left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)dx\right)\psi_{p+1}(t)$.

    a) Montrer que $u : g\mapsto u(g)$ est un endomorphisme de G.

    b) Ecrire la matrice de u dans la base C. Justifier que u est diagonalisable.

11. a) Vérifier que, pour g élément de G : $\langle g|u(g)\rangle=2\int_0^1\cos(\pi t)g^2(t)dt$.

    b) Soit λ une valeur propre de u, montrer d'abord que λ appartient au segment $[-2,2]$. Vérifier ensuite que λ ne vaut ni 2 ni -2 (on pourra raisonner par l'absurde).

12. Soient λ une valeur propre de u et θ un nombre réel de $]0,\pi[$ tel que : $\lambda=2\cos(\theta)$, on note ψ un vecteur propre associé. Il existe un p-uplet de nombres réels $\left(x_1,\ldots,x_p\right)$ tel que :
    $\psi=\sum_{k=1}^{p}x_k\psi_k$. On pose $x_0=x_{p+1}=0$.

    a) Vérifier que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $x_{k+1}-2\cos(\theta)x_k+x_{k-1}=0$.

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire l'existence d'un couple (A,B) de nombres réels tel que, pour tout k dans $[\![0,p+1]\!]$, $x_k = A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$.

c) Justifier que A est nul et qu'il existe s dans $[\![1,p]\!]$ tel que : $\theta = \dfrac{s\pi}{p+1}$.

d) En déduire les valeurs propres de u et une base de vecteurs propres de u.

Partie III : l'hypothèse (H_ω).

On revient au cas général : ω est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives. On note (H_ω) l'hypothèse : Il existe une suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n, $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse (H_ω) est-elle vérifiée si ω est la fonction constante 1 ? Justifier la réponse.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée.
Ainsi, on suppose qu'il existe ω une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse (H_ω) est réalisée ; on note a un nombre réel positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts, tels que, pour tout entier n : $E_{a_n}(\omega)\neq\{0\}$ et $0<a_n\leq a$.

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\in E_{a_n}(\omega)$ et $\int_0^1 (f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt = 1$. Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.
15. Soit φ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout n entier naturel, on note :

$c_n(\varphi)=\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt$ et $S_n(\varphi)=\sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)f_k$.

a) Que représente $S_n(\varphi)$?

b) Vérifier que, pour tout n entier naturel : $\|S_n(\varphi)\|_2^2=\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2$ et $\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2\leq\|\varphi\|_2^2$.

c) Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geq 0}(c_n(\varphi))^2$?

d) En déduire : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n''(t)\varphi(t)\,dt=0$.

16. a) Soit x un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. On définit la fonction φ_x par : $\varphi_x : t\in[0,1]\mapsto\begin{cases} t(x-1) & \text{si } t\in[0,x] \\ x(t-1) & \text{si } t\in\,]x,1]\end{cases}$. Vérifier que φ_x est un élément de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

b) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f_n à l'ordre 1 entre 0 et x.

Vérifier que : $f_n(x)=xf_n'(0)+\int_0^x(x-t)f_n''(t)\,dt$, puis : $f_n'(0)=-\int_0^1(1-t)f_n''(t)\,dt$.

c) En déduire : $f_n(x)=\int_0^1 \varphi_x(t) f_n''(t)\,dt$ et conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

d) Remarquer : $f_n(x)=-a_n\langle \varphi_x \mid f_n\rangle$, en déduire : $|f_n(x)|\le a\|\varphi_x\|_2$.

e) Calculer $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2\,dt$, en déduire : $|f_n(x)|\le ax(1-x)\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.

f) Justifier : $|f_n'(0)|\le a\dfrac{\sqrt{\|\omega\|_\infty}}{\sqrt{3}}$.

g) Rappeler pourquoi on a : $f_n'(x)=f_n'(0)-a_n\int_0^x \omega(t) f_n(t)\,dt$ et en déduire alors : $|f_n'(x)|\le a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$.

17. On note $C=a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$ (on remarque que C est un nombre réel strictement positif).
Déduire des questions précédentes : $\forall (x,y)\in[0,1]^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)-f_n(y)|\le C|x-y|$.

18. Soit ε un nombre réel strictement positif, on choisit N un entier naturel non-nul tel que : $\dfrac{1}{N}\le\dfrac{\varepsilon}{2C}$ et on pose, pour k dans $[\![0,N]\!]$: $\alpha_k=\dfrac{k}{N}$.

a) Justifier qu'il existe un entier naturel p tel que : $\forall n\ge p, \forall k\in[\![0,N]\!]$, $|f_n(\alpha_k)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) Soit alors x un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. En introduisant un entier k de $[\![0,N-1]\!]$ tel que : $x\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$, montrer que : $\forall n\ge p$, $|f_n(x)|<\varepsilon$.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty=0$.

d) Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 (f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt=0$ et conclure.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Fonctions réelles : limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg