Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2015, filière ECG

Mathématiques I HEC (ECS)

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire
- Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire
- Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2015/maths-s-hec-1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 280

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENTIFIQUE

Mercredi 29 avril 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptibles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc.).
Les trois parties du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème :

- On note p un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, on note B la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
- La transposée d'une matrice A est notée A^T. La matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée I_p.
- Pour toute application x : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))\end{array}$, on note :
  - ⋆ $x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_p'(t))$ en tout point $t \in \mathbb{R}_+$ où les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ sont dérivables ;
  - ⋆ $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \left(\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t), \ldots, \lim\limits_{t\to+\infty} x_p(t)\right)$ lorsque les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ admettent des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$.
- Pour toute suite $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(x_1(n), \ldots, x_p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ pour laquelle les suites $\left(x_1(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(x_p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, on définit la limite de la suite $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_1(n), \ldots, \lim\limits_{n\to+\infty} x_p(n)\right)$.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire.

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
On dit qu'une application $x : t \longmapsto x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est *pilotée par le couple* (A, b), si pour tout réel $t \geqslant 0$, les matrices colonnes $X(t)$ et $X'(t)$ de $x(t)$ et $x'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vérifient le système : $\forall t \geqslant 0,\ X'(t) = AX(t) + B$.
On appelle *équilibre du système piloté par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* \in \mathbb{R}^p$ vérifiant : $AX^* + B = 0$.

Tournez la page S.V.P.

On dit qu'un équilibre x^* est *attractif* si pour toute application x pilotée par (A, b), on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

1. *Le cas p=1.*

   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^*\times \mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, vérifiant : $\forall\, t \geqslant 0$, $x'(t) = ax(t) + b$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $y : t \longmapsto \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a\,t}$.

   b) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{a\,t}$.

   c) On identifie a à la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dont l'unique coefficient est a. Montrer que le système piloté par le couple (a, b) admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si $a < 0$.

2. *Exemple 1.* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 1)$. Soit $x : t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ une application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, pilotée par le couple (A, b).

   a) Déterminer l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (A, b).

   b) Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.
   Pourquoi peut-on choisir la matrice Q de telle manière que $Q^{-1} = Q^T$?

   c) Trouver deux réels λ et μ $(\lambda \leqslant \mu)$ et une matrice inversible Q vérifiant : $Q^{-1} = Q^T$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   d) Pour tout $t \geqslant 0$, on pose : $W(t) = Q^T X(t)$.

   (*i*) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $W'(t) = DW(t) + Q^T B$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   (*ii*) À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre x^* est attractif.

3. On suppose $p \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et u_p l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ tel que $u_p(e_1) = e_p$ et pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, $u_p(e_k) = e_{k-1}$.

   a) Écrire la matrice A_p de l'endomorphisme u_p dans la base $\mathcal{B}_p$. Quel est son rang ?

   b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ une racine p-ième de l'unité et G la matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.
   Montrer que G est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre complexe associée.

   c) Montrer que l'endomorphisme u_p est diagonalisable.

   d) Montrer que le polynôme $X^p - 1$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de u_p.
   L'endomorphisme u_p admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p ?

   e) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. L'endomorphisme $P(u_p)$ de $\mathbb{C}^p$ est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. *Exemple 2.* Soit α et β deux réels tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta \neq 1$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) On note A la matrice A_p de la question 3 dans le cas où $p = 3$.

   (*i*) Déterminer un polynôme P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que $M = P(A)$.

   (*ii*) En déduire les valeurs propres complexes de M ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.

   b) Soit $c = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

   (*i*) Trouver l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (M, c).

   (*ii*) Vérifier que l'application $x : t \longmapsto x(t) = x^* + \mathrm{e}^{(\alpha+\beta-1)t} c$ est pilotée par le couple (M, c).

   (*iii*) En déduire une condition nécessaire portant sur α et β pour que l'équilibre x^* soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

   c) On pose : $N = M^T + M$.

   (*i*) Quelles sont les valeurs propres de la matrice N ?

   (*ii*) Déterminer un réel $\theta > 0$ tel que toutes les valeurs propres de N soient inférieures ou égales à $-2\,\theta$.

d) On rappelle que $c = (1, 1, 1)$. On considère une application x pilotée par le couple (M, c).
On note y l'application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que $y : t \longmapsto x(t) - x^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{2\theta t} \|Y(t)\|^2$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(*i*) Vérifier que l'application y est pilotée par le couple $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$.
(*ii*) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) = \mathrm{e}^{2\theta t} \times Y(t)^T \big(N + 2\,\theta I_3\big) Y(t)$.
(*iii*) Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(*iv*) En déduire que l'équilibre x^* est attractif.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire.

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissance du stock de connaissances sont représentés, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions x_1 et x_2 respectivement.
Dans ce modèle où ρ désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions x_1 et x_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall\, t \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1'(t) = F_1\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ x_2'(t) = F_2\big(x_1(t), x_2(t)\big) \end{cases} \qquad (S)$$

dans lequel les deux fonctions F_1 et F_2 définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall\, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = \big(-\,u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1\big)\, u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = \big(-\,u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1\big)\, u_2 \end{cases} .$$

5.a) Pour tout réel $\nu > -1$, on pose : $\forall\, t \geqslant 0,\ x_1(t) = x_2(t) = \dfrac{1}{1 + \nu\, \mathrm{e}^{-t}}$.
Vérifier que l'application $x : t \longmapsto \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est solution du système (S).
b) En déduire que pour tout réel $c \in]0, 1[$, il existe une solution de (S) à valeurs dans $[\,c, +\infty[^{\,2}$.
c) Quel est l'unique couple $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$?
d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers x^* lorsque t tend vers $+\infty$?

6. Pour tout réel r, on note q_r la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice symétrique $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{C}_r$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2;\ q_r(u_1, u_2) = 1\}$.
a) Pour quelles valeurs de r la forme quadratique q_r est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie $\mathcal{C}_r$ de $\mathbb{R}^2$?

Dans toute la suite de cette question, r et s sont deux réels vérifiant les inégalités : $0 < s < r < 1$.

b) Justifier que l'ensemble $\{q_s(u_1, u_2);\ (u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r\}$ admet une borne inférieure, notée $m_{r,s}$, et une borne supérieure, notée $M_{r,s}$, et que ces deux bornes sont atteintes.
c) Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est non critique.
d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.
e) En déduire les valeurs de $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ et établir l'existence d'un réel μ tel que :

$$\forall\, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ q_s(u_1, u_2) \leqslant \mu\, q_r(u_1, u_2)\,.$$

7. On conserve les notations de la question 6.

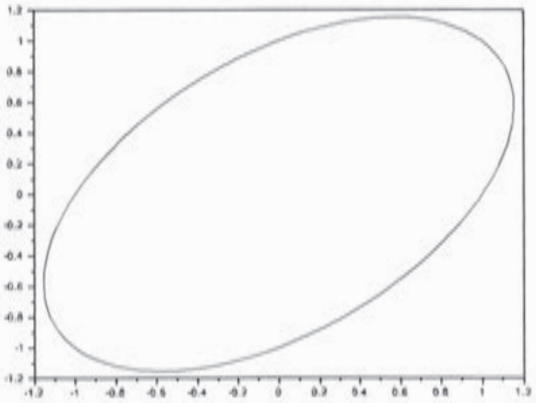
a) Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$.
Vérifier que $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r$ si et seulement si on a : $(1 - r)\,(v_1)^2 + (1 + r)\,(v_2)^2 = 1$.

Tournez la page S.V.P.

On se place désormais dans le cas où $r = \dfrac{1}{2}$ et $s = \dfrac{1}{4}$.

b) Pour faire tracer par *Scilab* le domaine $\mathcal{C}_r$, on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

```
(1) n=100;
(2) theta=linspace(0,2*%pi,n);
(3) ct=cos(theta);
(4) st=sin(theta);
(5) Cr=[ct-(1/sqrt(3))*st;ct+(1/sqrt(3))*st];
(6) plot(Cr(1, :),Cr(2, :))
```

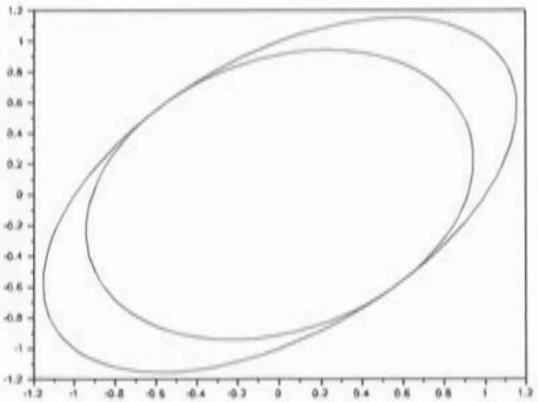


En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a), expliquer la méthode employée.
On précisera la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu des matrices `Cr` et `Cr(1,:)`.

c) Soit $z_0 > 0$ une valeur affectée à la variable `z` utilisée ci-dessous. Compléter la ligne (7) afin de tracer la ligne de niveau z_0 de la fonction q_s.

```
(7) Csz=[sqrt(z)*(?? *ct+?? *st) ; sqrt(z)*(?? *ct+?? *st)];
(8) plot(Csz(1, :),Csz(2, :))
```

d) Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur z_0 affectée à la variable `z`. Laquelle ?
On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit c un réel de $]0,1[$ et x une solution de (S) à valeurs dans $[c,+\infty[^2$.
On pose pour tout $t \geqslant 0$: $y_1(t) = x_1(t) - 1$ et $y_2(t) = x_2(t) - 1$. Pour $s = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $f(t) = q_s\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.
a) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $f'(t) = -2(1+\rho)\Big(x_1(t)\big(y_1(t) - s\,y_2(t)\big)^2 + x_2(t)\big(y_2(t) - s\,y_1(t)\big)^2\Big)$.
b) En déduire que pour $r = \dfrac{2s}{1+s^2}$, on a pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) \leqslant -2\,c \times \dfrac{1-s}{1-r} \times q_r\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.
c) Justifier pour tout $t \geqslant 0$, l'inégalité : $f'(t) \leqslant -2\,c\,f(t)$. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire.

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose $p \geqslant 2$. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Soit $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ définie par son terme initial $x(0)$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X(n+1) = A\,X(n) + B\,.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie : $X^* = AX^* + B$.
On suppose qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de D appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, +1[$.

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple (A, b) admet un unique équilibre x^*.

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de x^* sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires $y(n) = \big(y_1(n), \ldots, y_p(n)\big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soumis au système perturbé.

Soit $\big(U_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = V(U_n)$ la variance de U_n.
Soit $x(0) \in \mathbb{R}^p$ et $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = \big(A + U_1 I_p\big)\, X(0) + B \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y(n+1) = \big(A + U_{n+1} I_p\big)\, Y(n) + B \end{cases}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y(n)$ est la matrice colonne $\big(y_k(n)\big)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{E}\big(y(n)\big)$ le vecteur $\Big(E\big(y_1(n)\big), \ldots, E\big(y_p(n)\big)\Big) \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{E}\big(Y(n)\big)$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
    a) Calculer $\mathbf{E}\big(Y(1)\big)$ et justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\mathbf{E}\big(Y(n+1)\big) - X^* = A\Big(\mathbf{E}\big(Y(n)\big) - X^*\Big)$.
    b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\big(y(n)\big) = x^*$.

12. Soit $\big(z(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z(n) = Q^{-1}Y(n)$.
    a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, que : $V\big(z_k(n+1)\big) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\Big(E\big(z_k(n)\big)\Big)^2$.
    b) En déduire que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel $c_k \in]\,0, 1[$, un entier naturel N et un réel $M_k > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ V\big(z_k(n+1)\big) \leqslant c_k V\big(z_k(n)\big) + M_k\, v_{n+1}$.

13. On suppose que la série de terme général v_n est convergente. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.
    Avec les notations de la question 12.b), on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\alpha_m = V\big(z_k(N+m)\big)$ et $w_m = M_k\, v_{N+m+1}$.
    a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha_{m+1} \leqslant (c_k)^{m+1}\alpha_0 + \displaystyle\sum_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$.
    b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V\big(z_k(n)\big) = 0$.
    c) Montrer que la suite $\big(y_k(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers x_k^*.

Grâce aux résultats des questions 11.b) et 13.c), on peut dire que $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite d'estimateurs de* x^* *asymptotiquement sans biais et convergente.*

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire
- Polynômes
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg