Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2019, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : étude d'endomorphismes de polynômes
- Partie B : étude d'une fonction définie par une intégrale
- Partie C : une application en probabilité
- Partie D : étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire
- Partie E : étude d'une suite

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2019/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est constitué d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.

La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*

Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.

Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et de séries. Cette partie est aussi ***indépendante*** *du reste du problème.*

Tournez la page S.V.P.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\quad \Psi_a(P) = 2P + (X - a)\,P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, le polynôme Q_k par : $\quad Q_k = (X - a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \longmapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. **a.** Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Calculer, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

d. En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.

4. **a.** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2\,P(X)\big)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.

b. En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\quad \Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.

c. En déduire que $\Phi_a : P \longmapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

d. Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$

a. Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0\,;x]$ tels que :

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$

d. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \big(\Phi(f)\big)'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - 2\Phi(f)(x)\big).$$

7. **a.** Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

b. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On **admet** le résultat suivant :

$$\text{si}\quad \lim_{+\infty} f = 0,\quad \text{alors}\quad \lim_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = 0.$$

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \longmapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si}\quad \lim_{+\infty} f = \ell,\quad \text{alors}\quad \lim_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

b. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \longmapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si}\quad \lim_{-\infty} f = \ell,\quad \text{alors}\quad \lim_{-\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\,\Phi(F)$; ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,F(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$.

10. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de $x, F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

a. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

b. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $\mathbf{E}(X_1)$, et que l'on a : $\mathbf{E}(X_1) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\,\Phi(H_1)$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

D'après la question **11.**, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie **dans cette partie sur** $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13. a. Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\big(x^2+y^2\big)$.

b. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

On considère l'application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\,(f,g) \in E_2 \times E_2,\quad \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2.

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie **B.**, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\displaystyle h(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer les limites de $x \longmapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}$ et de $x \longmapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^3}$ en 0.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0,\quad \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{3}\,\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^X \big(\lambda\,f(x)+\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

d. En déduire : $\forall X > 0,\ \Big(\displaystyle\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\Big(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$.

e. Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leqslant \dfrac{2}{3}\|f\|$.

f. En utilisant la relation de la question **16.b**, justifier que la limite de $X \longmapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g. En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \dfrac{2}{3}\,\langle\Phi(f), f\rangle$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE E : Étude d'une suite

*Dans cette partie, **indépendante des précédentes**, on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k.$$

17. On suppose que l'on dispose d'une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.

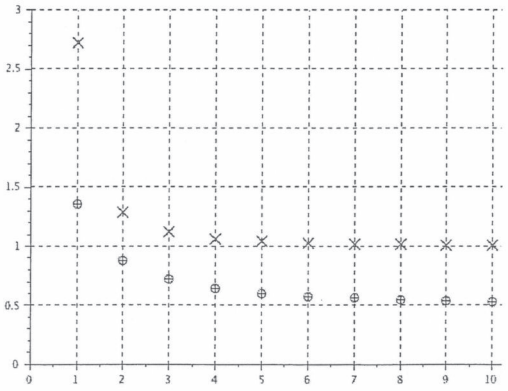
En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function v = suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

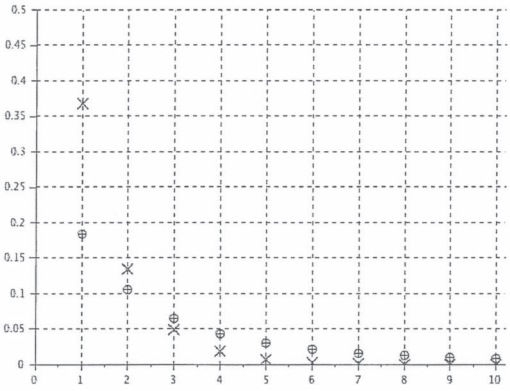
a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b. Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '$\times$' et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '$\oplus$'.

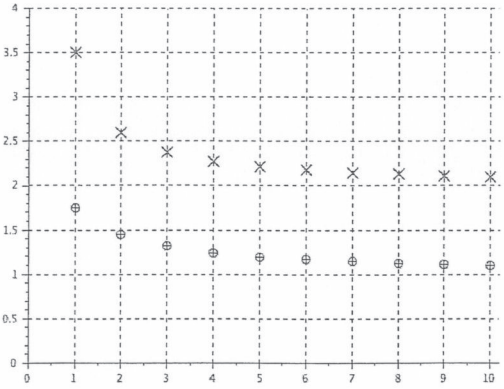
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



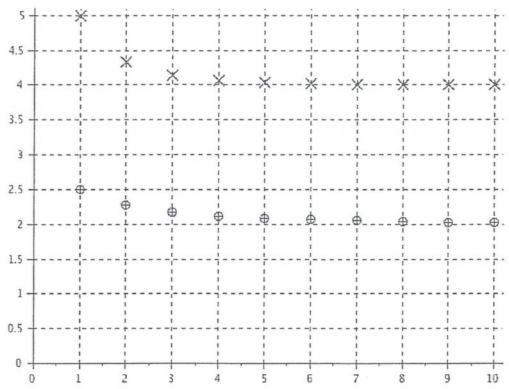
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathrm{e}^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathrm{e}^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4 + 5\,(0.9)^n$

c. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2} \quad$ et $\quad v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$.

d. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad (n+2)\, v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1} \quad$ puis $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}\big(u_{n+1} - 2\, v_{n+1}\big)$.

e. Démontrer toutes les conjectures faites à la question **18.b**.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a. Montrer : $\quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k \ - \ N v_N$.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

d. En déduire : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbf{P}(Y = k).$$

b. On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$.

Montrer : $\quad \mathbf{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

• FIN •

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Compléments d'algèbre linéaire
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Variables aléatoires à densité
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Algèbre bilinéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg