Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2020, filière ECG

Mathématiques approfondies ESSEC-HEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : résolution d'une équation différentielle scalaire
- Partie II : étude d'une fonction de deux variables
- Partie III : divergence de Kullback
- Partie IV : trajectoires d'une équation différentielle vectorielle

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2020/maths-appro-essec-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conceptions : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2020, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les équations étudiées dans ce problème sont utilisées en sciences sociales et en théorie dynamique des jeux pour décrire des processus influencés par un facteur d'imitation.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I : résolution d'une équation différentielle scalaire

Dans cette partie, r désigne un nombre réel, et on détermine les fonctions f à valeurs dans $]0,1[$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = r\left(f(t)\right)^2\left(1-f(t)\right) . \tag{1}$$

1. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \ u(t) = \frac{t}{1-t}\,\mathrm{e}^{-1/t} \tag{2}$$

a) Justifier que la limite à droite de la fonction u en 0 est nulle. Quelle est la limite à gauche de la fonction u en 0 ?

b) Démontrer qu'il existe un polynôme P, que l'on précisera, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, \ u'(t) = \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{e}^{-1/t} .$$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction u et donner l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit φ l'application de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{3}$$

a) Justifier que l'application φ est bijective.

b) L'application φ est-elle de classe C^1 sur $[0,1[$?

c) L'application φ^{-1} est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

d) Donner un script *Scilab* fournissant une représentation graphique de φ^{-1}.

3. a) Démontrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, la fonction composée $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f et de f'.

b) Démontrer que, pour tout réel $a \in]0,1[$, l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ vérifiant (1) et $f(0) = a$ est la fonction f_a donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(a)\,\mathrm{e}^{rt}\big) \tag{4}$$

4. *Dans cette question*, r est supposé strictement positif et a est un élément de $]0,1[$.

a) Démontrer que la fonction f_a est monotone. Quelles en sont les limites en $-\infty$ et $+\infty$?

b) Donner une expression de la dérivée seconde f''_a à l'aide de f'_a et f_a. En déduire que la courbe représentative de f_a admet un unique point d'inflexion.

c) Trouver l'ensemble de ces points d'inflexion lorsque a décrit l'intervalle $]0,1[$. Que peut-on dire des tangentes aux courbes représentatives des fonctions f_a en ces points ?

Partie II : étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \quad K(x,y) = x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x) \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \tag{5}$$

5. a) Justifier que K est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$.

b) Calculer la dérivée partielle $\partial_2(K)$.

c) Étudier le signe de $\partial_2(K)$ et en déduire que la fonction K admet un minimum global, égal à 0.

d) La fonction K est-elle majorée ?

6. Pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, on note $q_{(x,y)}$ la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2(K)(x,y)$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux de K.

b) Justifier, pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, l'inégalité : $q_{(x,y)}(1,0) \geq 4$.

7. Pour un élément (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$, on note : $\begin{cases} z = (y,y) \\ w = (x-y,0) \end{cases}$.

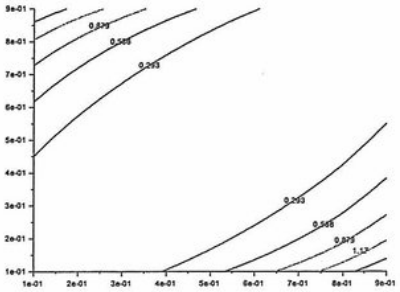
a) En utilisant une formule de Taylor, établir l'égalité :

$$K(x,y) = \int_0^1 (1-t)\, q_{z+tw}(w)\,\mathrm{d}t \ .$$

b) En déduire l'inégalité :

$$K(x,y) \geq 2(x-y)^2 \tag{6}$$

8. a) Écrire un script *Scilab* permettant de donner une représentation graphique de la fonction K.
b) La figure suivante représente des lignes de niveau de la fonction K.



Chaque ligne de niveau présente un centre de symétrie. Lequel et pourquoi ?

Partie III : divergence de Kullback

Dans cette partie, Q^* et Q désignent deux probabilités distinctes sur l'espace probabilisable $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^*(\{n\})\, Q(\{n\}) > 0 \,.$$

Pour toute variable aléatoire X sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, on note :

$$d(X) = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} Q^*([X = x]) \ln\Big(\frac{Q^*([X = x])}{Q([X = x])}\Big) \tag{7}$$

sous réserve que cette somme ait un sens.

9. Un exemple
Dans cette question (et seulement dans cette question), λ^* et λ sont deux réels strictement positifs distincts, et on suppose que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ^* pour la probabilité Q^*, la loi de Poisson de paramètre λ pour la probabilité Q.

a) Justifier l'existence de $d(X)$ et vérifier l'égalité :

$$d(X) = -\lambda^* \ln\Big(\frac{\lambda}{\lambda^*}\Big) + \lambda - \lambda^* \cdot$$

b) Préciser le signe de $d(X)$ et prouver que $d(X)$ est négligeable devant $\lambda - \lambda^*$ lorsque λ tend vers λ^*.

10. Dans cette question, ψ désigne une fonction à valeurs réelles, de classe C^1 et convexe sur $]0, +\infty[$.
Soit U une variable aléatoire discrète strictement positive, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que les deux variables aléatoires U et $\psi(U)$ admettent chacune une espérance.

a) Justifier que l'espérance $E(U)$ est strictement positive.
b) Pour tout $x > 0$, comparer les deux nombres $\psi(x) - \psi\big(E(U)\big)$ et $\psi'\big(E(U)\big)\,\big(x - E(U)\big)$.
c) En déduire l'inégalité :

$$\psi\big(E(U)\big) \leq E\big(\psi(U)\big) \tag{8}$$

d) En utilisant la concavité de la fonction ln et l'inégalité (8), démontrer que, lorsqu'il existe, le réel $d(X)$ est positif ou nul.

Tournez la page S.V.P.

Dans les questions 11 et 12, on suppose que l'ensemble $X(\mathbb{N})$ est fini.

11. Soit g une application de $X(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. On note Y la variable aléatoire sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y(n) = g\big(X(n)\big) \ .$$

a) Pour tout $y \in Y(\mathbb{N})$, on note $g^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ tels que $g(x) = y$.

Établir l'égalité :

$$d(X) = d(Y) + \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} \Big(Q^*([Y=y]) \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q^*_{[Y=y]}([X=x]) \ln \big(\frac{Q^*_{[Y=y]}([X=x])}{Q_{[Y=y]}([X=x])} \big) \Big) \ .$$

b) En déduire l'inégalité :

$$d(X) \geq d(Y) \ .$$

12. Soit B l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ pour lesquels $Q([X=x])$ est inférieur ou égal à $Q^*([X=x])$.

a) Justifier que $Q^*([X \in B])$ et $Q([X \in B])$ sont strictement compris entre 0 et 1, et démontrer que :

$$\Big(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big| \, Q([X=x]) - Q^*([X=x]) \, \big| \Big)^2 = 4 \Big(Q([X \in B]) - Q^*([X \in B]) \Big)^2 \ .$$

b) Vérifier que, si Y est la variable aléatoire sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(n) \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $d(Y) = K\big(Q^*([X \in B]), Q([X \in B])\big)$, où K est la fonction de deux variables définie dans la partie II par (5).

c) Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$d(X) \geq \frac{1}{2} \Big(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big| \, Q([X=x]) - Q^*([X=x]) \, \big| \Big)^2 \tag{9}$$

Partie IV : trajectoires d'une équation différentielle vectorielle.

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de fonctions qui vérifient une équation qui généralise (1), dans un contexte multidimensionnel.

Pour un entier n donné, supérieur ou égal à 2, on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \ , \ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour lequel la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormée.

On considère une matrice carrée $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dont les composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(0) = 1 \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \ f_i(0) > 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_i'(t) = \langle e_i - f(t), Rf(t) \rangle \ f_i(t) \end{cases} \tag{10}$$

où $Rf(t)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est $R \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

13. Soit v une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et V une primitive de v sur $\mathbb{R}$.
On considère une fonction $y : t \longmapsto y(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = v(t)\, y(t)\ .$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto y(t)\, \mathrm{e}^{-V(t)}$.

b) En déduire que si $y(0)$ est nul, alors $y(t)$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du signe de la fonction y si $y(0)$ n'est pas nul ?

14. a) En appliquant ce qui précède à la fonction $y : t \longmapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} f_i(t)$, justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1\ .$$

b) Justifier que, pour tout réel t et tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(t)$ est strictement positif.

On note :

$$\left\{\begin{array}{l} T = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \ /\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\} \\ \\ T^* = T \cap (\mathbb{R}_+^*)^n \end{array}\right. \tag{11}$$

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in T^*$ tel que :

$$\forall x \in T \setminus \{x^*\},\quad \langle x^* - x, Rx \rangle > 0 \tag{12}$$

où Rx est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est $R \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On note H la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[^n$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in]0,1[^n,\quad H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*\ \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \tag{13}$$

15. a) En utilisant le résultat de la question 12, justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad H\big(f(t)\big) \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - x_i^*|\right)^2\ .$$

b) Justifier que la fonction composée $H \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f, R et x^*.

c) En déduire que $H \circ f$ admet une limite en $+\infty$, que l'on notera ℓ.

16. Pour tout $x \in T^*$, établir les inégalités :

$$H(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{x_i}\,(x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}\ \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2\right)^{1/2}\ .$$

Tournez la page S.V.P.

17. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif c tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(t) \geq c \tag{14}$$

a) Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i(t) - x_i^*)^2 \geq c^2 \ell^2 \ .$$

b) Justifier que, pour tout réel strictement positif p, il existe $q > 0$ tel que :

$$\forall x \in T, \quad \Big(\langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq p\Big) \Longrightarrow \Big(\langle x^* - x, Rx \rangle \geq q\Big) \ .$$

c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite ℓ de $H \circ f$ en $+\infty$ est nulle et en déduire que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} f_i(t) = x_i^* \ .$$

18. Un exemple

On note U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On suppose que

$$R = \lambda I + A \tag{15}$$

où λ est un nombre réel strictement négatif, I la matrice-identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AU = 0 \tag{16}$$

a) Justifier que le vecteur $x^* = \dfrac{1}{n}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$ vérifie (12).

b) Démontrer que la fonction $t \longmapsto f_1(t) f_2(t) \ldots f_n(t)$ est croissante.

c) Justifier que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(t)$ tend vers $\dfrac{1}{n}$ quand t tend vers $+\infty$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Logique, ensembles et applications
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Algèbre bilinéaire
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Probabilités sur un univers fini

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg