Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2021, filière ECG

Mathématiques 2 appliquées ESSEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Première partie : comportement asymptotique des temps de panne
- Deuxième partie : le processus de renouvellement
- Troisième partie : théorème du renouvellement

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2021/maths-appli-2-essec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 287

Conception : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Vendredi 30 avril 2021, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements et, notamment, le fait de prévoir le remplacement d'éléments défaillants. Imaginons par exemple qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire ; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite... Une bonne gestion nécessite donc d'avoir connaissance du comportement des pannes successives, et notamment de ce comportement en moyenne, pour pouvoir prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement et le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste la décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on regarde quelques propriétés de base du processus. Enfin la troisième est consacrée à la détermination du comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance et $\mathrm{Var}(Y)$ sa variance quand elles existent. On **admettra** en outre la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires positives telles que $Y \leq Z$ et $E(Z)$ existe, alors Y admet une espérance et $E(Y) \leq E(Z)$.

Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ positives, indépendantes et de même loi. On notera, pour tout réel t, $F(t) = P(X_1 \leq t)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. On suppose $F(0) = P(X_1 = 0) < 1$. De plus, on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $E(X_1^4)$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Tournez la page S.V.P.

Première partie : **Comportement asymptotique des temps de panne**

1)

(a)

i) Soit r un entier naturel tel que $1 \leq r \leq 4$. Montrer que $X_1^r \leq 1 + X_1^4$.

ii) Montrer que pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, X_1^r admet une espérance.

On notera tout au long du problème $\mu = E(X_1)$.

iii) Montrer que $\mu > 0$.

iv) Montrer que la variable aléatoire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

2) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $B_n \supset B_{n+1}$. On pose $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(*) $\omega \in B$;

(**) ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.

(c) Montrer que $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

(d) Montrer que si C et D sont deux événements, on a $P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$.

(e) Montrer que $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(f) Déduire que $P(B) = 0$.

3) Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes, centrées et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $\text{Var}(Y_1) = E(Y_1^2) = \sigma^2$ et $E(Y_1^4) = \rho^4$. On pose enfin, pour tout entier $n \geq 1$, $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, on a $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big| > \varepsilon\Big) = 0$.

(b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

i) Montrer que $P\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big| > \varepsilon\Big) = P\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4 > \varepsilon^4\Big)$.

ii) Montrer que $P\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big)$.

iii) Montrer que

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k W_k$$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ (on ne cherchera pas à expliciter cette variable aléatoire).

iv) Montrer que $E((\Sigma_n)^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$.

v) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n strictement positif

$$E\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) \leq \frac{C}{n^2}.$$

vi) Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$.

4) On définit, pour tout entier $n \geq 1$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right]$.

(a) Montrer que la série de terme général $P(A_n)$ est convergente.

(b) En déduire que la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

(c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

(d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

5)

(a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geq 0}$ est croissante.

On considère la fonction S_∞ définie sur Ω par $S_\infty(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si $(S_n(\omega))_{n\geq 1}$ diverge.

(b) Montrer que si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

(c) En déduire que $P(S_\infty = +\infty) = 1$.

Deuxième partie : **Le processus de renouvellement**

On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1, la suite $(S_n(\omega))_{n\geq 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geq 0$, la variable aléatoire

$$N_t = \max\{k \in \mathbb{N}, S_k \leq t\}.$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

6)

(a) Soient deux réels s et t tels que $0 \leq s \leq t$. Montrer que $N_s \leq N_t$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité des événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.

(c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, montrer que la limite $\lim_{t\to+\infty} N_t(\omega)$ existe (elle est éventuellement infinie). On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.

(d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose $N_\infty(\omega) = K$.

i) Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que $\forall t \geq T_\omega, N_t(\omega) = K$.

ii) Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leq T_\omega$, et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geq T_\omega$.

iii) En déduire que si $N_\infty(\omega) = K$ alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout t réel positif, ce qui est absurde.

iv) Conclure que $P(N_\infty = +\infty) = 1$.

7) On souhaite écrire une fonction en Scilab qui simule informatiquement la variable N_t. On suppose que la fonction `X` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X. Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un nombre réel t, et renvoie une réalisation de N_t :

```
function N = Renouvellement(t)
          N=0;
          S=0;
    while ...
    ...
endfunction
```


Tournez la page S.V.P.

8)

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1).$$

(b) Pour tout réel $t \geq 0$, pour tout entier naturel n, on note $F_n(t) = P(S_n \leq t)$.

i) Déterminer F_0 et F_1.

ii) Montrer que $P(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

9) Soient U, V, U', V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $P(U = k) \neq 0$, on a

$$P_{[U=k]}(V = j) = P_{[U'=k]}(V' = j).$$

Montrer que V et V' suivent la même loi.

10) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

On note $W = \min\{k \geq 1, Z_k = 1\}$.

(a) Montrer que pour tout $i \geq 1$, $P(W = i) = p(1-p)^{i-1}$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $W_n = \min\left\{k \geq 1, \sum_{l=1}^{k} Z_l = n\right\}$.

i) Montrer que pour tout $k \geq n$, on a

$$P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

ii) Montrer que pour tout $k \geq n$ et $j \geq k+1$, on a

$$P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

(c) On suppose que pour tout entier $i \geq 1$, $P(X_1 = i) = p(1-p)^{i-1}$.

i) Montrer que pour tous entiers j et k tels que $j \geq k+1$, on a

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

ii) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, S_n a même loi que W_n.

(d) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel n non nul, on a

$$P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1},$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier naturel inférieur ou égal à t (par convention $\sum_{k=r}^{s} = 0$ si $r > s$).

Troisième partie : **Théorème du renouvellement**

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11)

(a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$.

(b) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout réel $t \geq T_\omega$,

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leq \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.$$

(c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(e) En déduire que l'événement $\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

On va maintenant chercher à montrer que le résultat précédent s'étend en moyenne, c'est-à-dire que

$$\lim_{t\to+\infty} E\Big(\frac{N_t}{t}\Big) = \frac{1}{\mu}.$$

12) On commence par examiner un contre-exemple qui montre que le résultat ne se déduit pas automatiquement de la question précédente. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad U > 1/n \\ n & \text{si} \quad U \leq 1/n \end{cases}$$

avec la convention $Y_n(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $U(\omega) = 0$.

(a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer qu'il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_\omega$, on a $Y_n(\omega) = 0$.

(b) En déduire que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} Y_n = 0\right]$ a pour probabilité 1.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $E(Y_n) = 1$. On n'a donc pas $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = E(\lim_{n\to+\infty} Y_n)$.

13) Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_J = \sum_{k=1}^{J} X_k$.

(a) Montrer que $S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{[J\geq k]}$ où $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A\,, \\ 1 & \text{si } \omega \in A\,. \end{cases}$

On suppose désormais que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 1$, la variable $\mathbb{1}_{[J\leq n]}$ est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ On **admettra** que si $(W_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires positives, l'écriture formelle $\sum_{n=1}^{+\infty} E(W_n) = E\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} W_n\Big)$ est toujours valide sous réserve d'existence.

(b) Montrer que les variables aléatoires X_k et $\mathbb{1}_{[J\geq k]}$ sont indépendantes.

(c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i) Montrer que $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geq n]}$.

ii) Montrer que $E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n)$.

Tournez la page S.V.P.

(d) Montrer que $E(S_J) = E(X_1)E(J) = \mu E(J)$.

14)

(a) Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = N_t + 1$. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[J \leq n]}$ est indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

(b) En déduire que $E(S_{N_t+1}) = \mu\,(E(N_t) + 1)$ puis que $E(N_t) = \dfrac{E(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$.

15) Montrer que pour tout $t > 0$, $\dfrac{E(N_t)}{t} \geq \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{t}$.

16) Soit $b > 0$. On pose $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

(a) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

(b) On pose $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\tilde{\mu}_b = E(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$.

i) Montrer que $\forall n \geq 1, \tilde{S}_n \leq S_n$.

ii) Montrer que $\forall t \geq 0, \tilde{N}_t \geq N_t$.

iii) Montrer que $\forall t \geq 0, \tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leq t + b$.

(c)

i) Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t}$.

ii) En déduire que pour tout réel $b > 0$,

$$\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{E(\tilde{N}_t)}{t} \leq \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

(d) On choisit $b = \sqrt{t}$.

i) Montrer que

$$\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}.$$

ii) Montrer que $0 \leq X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.

iii) En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} E(\min(\sqrt{t}, X_1)) = \mu$.

iv) Conclure que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{E(N_t)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Couples de variables aléatoires discrètes finies

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg