Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2021, filière ECG

Mathématiques appliquées ESSEC-HEC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1. Lois composées
- Partie 2. Le modèle de Cori
- Partie 3. Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2021/maths-appli-essec-hec

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 288

Conception : HEC Paris – ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 28 avril 2021, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.

Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.
- une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$,

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.

On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

1. *Un exemple avec Scilab.* On considère le script Scilab suivant :

```
function r=X(t)
r=1
while rand()>...
r=...
end
endfunction

Y=rand()
Z=...
disp(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont `Y` est une simulation, compléter le script précédent pour que `Z` soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

- *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions 2 et 3 que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y)\mathbb{P}([Y = y])$$

et si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = E(f_k(Y)) \qquad (1)$$

c) *Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$.* Soit $p \in]0, 1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1 - p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E(g(Y))$ existe.

a) Montrer que :

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathbb{P}([Y = y]) \right)$$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $E(Z)$ existe et que :

$$E(Z) = E(g(Y)) \qquad (2)$$

- *On admet que les résultats établis dans les questions 2 et 3, en particulier (1) et (2), sont encore vrais lorsque Y n'est plus discrète.*

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0, 1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

b) Que vaut $E(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t, que peut-on dire de $E(g(Y))$?

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0, +\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda \, \mathrm{e}^{-(\lambda+1)t} \, dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

Tournez la page S.V.P.

b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x}\, dx = 1$$

c) Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de $Z+1$.

d) En déduire $E(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

  Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt.

  Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

  Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $E(R_n)$ et on pose $r_n = E(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (\star)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(\star)$.
7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe. Montrer que $E(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n E(I_n)$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \qquad (3)$$

8. *Programmation de z_n avec Scilab.*
   On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.

   On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ \ldots \ \alpha_d)$.

   Ecrire une fonction Scilab d'entête `function r=z(Delta,n)` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ.
9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".
    a) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
    b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir que, pour tout $p \geqslant d$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

    puis que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.
    c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.
    d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.
11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

    b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

Tournez la page S.V.P.

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\alpha \leqslant \rho$. On note (H_1) cette hypothèse.

    a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k}$?

    En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

    - On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

    b) Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $z_n \leqslant M\theta^n$.

    c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

    On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions 13 à 16, que **la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur $\dfrac{1}{\alpha}$**. On note (H_3) cette hypothèse.

  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. a) Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \ \ldots \ a_d)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

    b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^nU_0$ puis que $z_{n+1} = LA^nU_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right)$.

    a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

    b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.

    c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

16. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^{d} b_k w_k = 0$.

a) Montrer que pour tout $W \in H$, $AW \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que $U_0 - sV \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $LA^nW \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire que $\lim_{n\to+\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Couples de variables aléatoires discrètes finies
- Variables aléatoires à densité
- Suites réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Éléments propres et réduction
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg