Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2021, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2021/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 27 avril 2021, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 1

PARTIE A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. a. Montrer : $\forall t \in]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$.

b. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ.

2. Montrer alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{u_n+v_n}{2} - \gamma\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

b. En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function gamma = approx()` qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge.

On pose alors, pour tout x de $[0\,;+\infty[$: $\displaystyle S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.

5. a. Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

En déduire la valeur de $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

6. a. Montrer : $\forall (x,y) \in [0\,;+\infty[^2,\ S(y) - S(x) = (y-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}$.

b. En déduire que S est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \forall h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}$.

On **admet** que S' est également continue sur $[0\,;+\infty[$.

7. **a.** Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{x+1}$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c. En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0\,;+\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

8. **a.** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x$, le réel u_n étant défini dans la partie **A**.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

c. Conclure : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \gamma$.

PARTIE C : Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

9. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de densité f.

10. **a.** Déterminer la fonction de répartition de X.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

11. **a.** Montrer, pour tout x de $[0\,;1[$:

$$\mathbf{P}(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(k \leqslant X \leqslant k+x) \qquad \text{puis} \qquad \mathbf{P}(Y \leqslant x) = S(x).$$

b. En déduire la fonction de répartition de Y.

c. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y.

12. Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\mathbf{E}(Y) = 1 - \gamma.$$

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to+\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout k de $\mathbb{N}$, $T_k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\, X^i$ avec $(a_{k,0}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

et si $T = \sum_{i=0}^{n} b_i\, X^i$ avec $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

alors : pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} a_{k,i} = b_i$.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)\,P' + \frac{1}{n^2}\,X(X-1)^2\,P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}\,X^{i+1} + \frac{2\,i\,(n-i)}{n^2}\,X^i + \frac{i^2}{n^2}\,X^{i-1}.$$

b. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

2. **Cas $n = 2$:**

a. Vérifier : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que le spectre de A_2 est $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$.

Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2.

c. En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2.

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(X-1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\dfrac{-1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier : $\forall i \in [\![0\,;n]\!], \quad \big(\varphi_n(X^i)\big)(1) = 1.$

b. En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

c. Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (n+1)^2\,\varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)\,(n^2\varphi_n(P) - P)$.

b. En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ, alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ.

6. **a.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2}\,;\, j \in [\![0\,;n]\!] \right\}.$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\Pi_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i$.

a. À l'aide de la question **1.a.**, montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.

b. En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout j de $[\![0\,;n]\!]$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

a. Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n^k(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j\right)^k R_j$, où φ_n^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}$.

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $\left(\varphi_n^k(P)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha\,\Pi_n$.

PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher.

Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k-ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

Tournez la page S.V.P.

9. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}=i)=\left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2\mathbf{P}(Z_k=i-1)+2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\mathbf{P}(Z_k=i)+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2\mathbf{P}(Z_k=i+1).$$

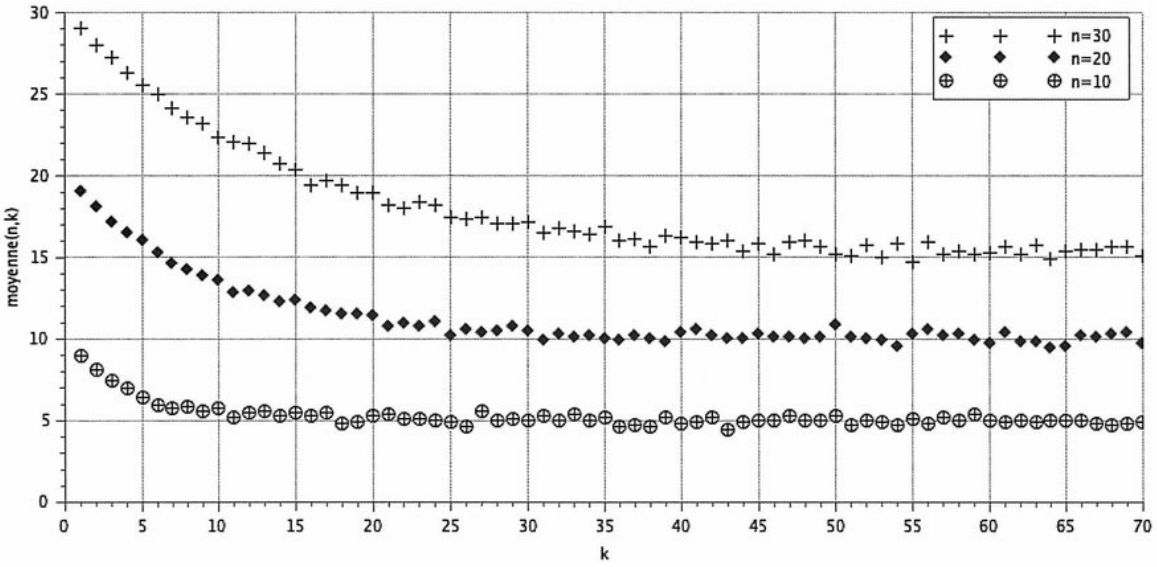
11. a. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k.

```
function Z = simule(n,k)
    R = n // R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
    for j = 1:k
        aleaR = rand()
        aleaB = rand()
        if aleaR <= (R/n) & aleaB <= (R/n) then
            R = ........
        elseif ....... then
            R = R+1
        end
    end
    Z = .......
endfunction
```

b. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function E = esperance(n,k)` qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k.

On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

c. On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n. On obtient le graphe ci-dessous.



Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

a. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

b. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i).$$

c. Montrer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\mathbf{E}(Z_k) \qquad \text{puis} \qquad \mathbf{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathbf{E}(Z_k) + 1.$$

d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de k et de n.
Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

13. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\displaystyle Q_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Z_k = i)\, X^i$.

a. À l'aide de la question **1.a.**, démontrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}, \quad \text{où } \varphi_n \text{ est l'endomorphisme étudié dans la partie } \mathbf{A}.$$

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha\,\Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question **7.**.

14. a. Déduire de la question précédente : pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2$.

b. On **admet** la formule suivante : $\forall (a,b,m) \in \mathbb{N}^3$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}$.

Montrer : $\displaystyle\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

c. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.

• FIN •

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Variables aléatoires à densité
- Réels, sommes et produits
- Éléments propres et réduction
- Polynômes
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg