Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2026, filière ECG

Mathématiques approfondies emlyon

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ecg/2026/maths-appro-emlyon

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Code sujet : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emLyon bs

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 22 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Le sujet est composé de deux problèmes.

On suppose, pour toutes les questions en langage `Python`*, les bibliothèques usuelles déjà importées sous leurs raccourcis habituels.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Tournez la page S.V.P.

Problème 1

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé et $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme associée, notée $\| \cdot \|$. On utilise les mêmes notations pour le produit scalaire et la norme usuels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la *trace* de A est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Partie 1 - Un exemple

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$ et où la matrice A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note S_1 le cercle unité du plan $\mathbb{R}^2$, défini par : $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x, y)\| = 1\}$. On **admet** que S_1 est un fermé borné.

1. Déterminer une matrice orthogonale $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant, telles que $A = QD\,{}^tQ$.

On introduit alors la fonction φ définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

2. **a**. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad \varphi(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. Montrer que φ admet une infinité de points critiques et les expliciter.

c. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $\varphi(\alpha x, \alpha y) = \varphi(x, y)$.

d. En déduire que φ présente un maximum global sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, puis préciser sa valeur et où ce maximum est atteint.

Partie 2 - Une inégalité sur la trace

3. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ un entier et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice non nécessairement carrée.

a. Expliciter, en fonction des coefficients de B, les coefficients des matrices ${}^tBB$ et $B\,{}^tB$.

b. En déduire que $\mathrm{Tr}({}^tBB) = \mathrm{Tr}(B\,{}^tB)$.

On note $D = [0, 1]^n$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{C}_k = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\}$.

On **admet** que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les ensembles D et $D \cap \mathcal{C}_k$ sont des ensembles fermés et bornés.

4. Représenter graphiquement, pour $n = 2$, les ensembles $D, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Soit $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$. On considère la fonction f_Λ définie sur D par

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in D, \quad f_\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On suppose que $\Lambda \notin \mathrm{Vect}((1, 1, ..., 1))$. Montrer que f_Λ admet un maximum global sur D sous la contrainte $\mathcal{C}_k$. Expliciter un point en lequel ce maximum est atteint.

6. Soit π une projection de $\mathbb{R}^n$ dont on note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dans la base canonique.

a. Montrer que : $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{Tr}(P)$.
On pourra commencer par écrire $\mathbb{R}^n = F \oplus G$, pour F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ à expliciter et déterminer la matrice de π dans une base adaptée à cette décomposition.
b. Montrer que, si π est orthogonale, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$.
c. Déduire de la question précédente que, si π est orthogonale, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_{i,i} \in [0, 1]$.

Soient $r \in [\![1, n]\!]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de rang r.
On fixe alors un entier $k \leqslant r$. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes $C_1, ..., C_k$ forment une famille orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à choisir M de sorte à rendre maximale la quantité

$$\mathrm{Tr}\left({}^tMAM\right).$$

7. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$ telles que

$$A = QD\,{}^tQ.$$

On notera dans la suite $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ et $V_1, V_2, ..., V_n$ les colonnes de Q.

8. Calculer ${}^tMM$.

9. On suppose dans cette question, et dans cette question uniquement, que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \lambda_1$, c'est à dire que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1\}$. Que dire de $\mathrm{Tr}\left({}^tMAM\right)$ dans ce cas ?

10. On suppose dans la suite que A admet au moins deux valeurs propres distinctes. On pose alors $X = {}^tQM \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $P = X\,{}^tX$.

a. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale.
b. Montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}({}^tX)$. En déduire que $\mathrm{rg}(P) = k$.
c. Montrer que $\mathrm{Tr}({}^tMAM) = \mathrm{Tr}(PD)$.
En déduire que

$$\mathrm{Tr}({}^tMAM) \leqslant \max\left\{f_\Lambda(x_1, x_1, ..., x_n) :\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \cap \mathcal{C}_k\right\}.$$

d. Conclure que, si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $C_i = V_i$, alors la quantité $\mathrm{Tr}({}^tMAM)$ est maximale.
e. Commenter alors le résultat obtenu à la Question **2.d.**

L'optimisation des inégalités de trace trouve des applications dans des problèmes d'analyse de données (appelés problèmes de régression) ou autres problèmes d'approximation matricielle.

Tournez la page S.V.P.

Problème 2

Dans tout le problème, on considère que les variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. Si Y est une variable aléatoire définie sur Ω, on note respectivement (en cas d'existence) $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ l'espérance et la variance de Y.

Partie 1 - Des résultats préliminaires

*Les quatre questions de cette partie sont indépendantes. On démontre, dans chacune de ces questions, un résultat qui sera utilisé dans la **Partie 2**. On pourra, si besoin, admettre ces résultats.*

1. Soit W une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction G_W, définie sur $[0,1]$, par

$$\forall t \in [0,1], \qquad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W=n) t^n.$$

a. Justifier que G_W est bien définie sur $[0,1]$.

b. Montrer que G_W est croissante sur $[0,1]$.

c. En déduire l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim\limits_{t \to 1^-} G_W(t) = \ell$.

d. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n) t^n \leqslant G_W(t) \leqslant G_W(1),$$

puis que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n) \leqslant \ell \leqslant G_W(1).$$

e. En déduire que G_W est continue en 1.

f. Justifier que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\mathbf{P}(W=n) t^{n-1}$ est convergente.

On **admet** que G_W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et que, pour tout $t \in [0,1[$:

$$G'_W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(W=n) t^{n-1}.$$

2. Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - x \leqslant \exp(-x)$.

b. Montrer que, pour tous entiers m, n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$, on a:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k \right) \geqslant 1 - \exp\left(- \sum_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k) \right).$$

c. On suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ diverge.

Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k \right) = 1.$$

On vient de montrer que dans le cas où la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ *diverge, alors la probabilité qu'une infinité de ces évènements se réalisent simultanément est égale à* 1.

3. Soit $(W_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les vecteurs aléatoires U_n et $V_{n,k}$ définis par

$$U_n = \left(W_1, W_1 + W_2, ..., \sum_{i=1}^{n} W_i\right), \quad \text{et} \quad V_{n,k} = \left(W_k, W_k + W_{k+1}, ..., \sum_{i=k}^{n-1+k} W_i\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{P}(U_n = (j_1, j_2, ..., j_n)) = \mathbf{P}(V_{n,k} = (j_1, j_2, ..., j_n)).$$

On ***admet*** *qu'on vient de montrer que, pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, U_n *et* $V_{n,k}$ *sont des vecteurs aléatoires de même loi.*

4. On considère deux séries convergentes, à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} c_k$ et qu'on a de plus : $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$.

Partie 2 - Une marche aléatoire

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi, telles que, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On introduit alors $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée *marche aléatoire* ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n prend pour valeur la position (sur un axe gradué) d'un marcheur après n déplacements aléatoires vers la gauche ou vers la droite en partant de l'origine.

5. **a**. Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$.
b. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, les valeurs de $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

6. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine dont on précisera la valeur.

7. **Simulations sous** `Python`.

a. Écrire une fonction d'en-tête `def simul_X():` qui renvoie une simulation de X_1.

Tournez la page S.V.P.

b. En déduire l'écriture d'une fonction d'en-tête `def simul_S(n):` qui prend un argument n entier et renvoie une simulation de S_n.

8. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} - n$.

Quelle est la loi suivie, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par la variable aléatoire $\frac{X_k+1}{2}$?

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$.

a. Justifier que, si i et n n'ont pas la même parité, alors $\mathbf{P}(S_n = i) = 0$.

b. Montrer que, si i a la même parité que n, alors $\mathbf{P}(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

10. On **admet** la *formule de Stirling* : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

b. Conclure, à l'aide de la Question **2.c.**, que, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0.

On note T la variable aléatoire qui vaut -1 si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[S_n \leqslant 0]$ est réalisé, ou sinon, qui prend la valeur du plus petit entier $n \geqslant 1$ pour lequel $[S_n > 0]$ est réalisé. En particulier, $\mathbf{P}(T = 0) = 0$.

11. **a**. Calculer $\mathbf{P}(T = 1)$.

b. Soit $n \geqslant 2$. Expliquer de manière succincte l'égalité : $[T = n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leqslant 0]\right) \cap [S_n = 1]$.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n pair, $\mathbf{P}(T = n) = 0$.

12. On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement

$$R_k = [S_1 = -1] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{k} [S_j \leqslant -1]\right) \cap [S_{k+1} = 0].$$

a. Expliquer par une phrase claire et rigoureuse ce que signifie la réalisation de l'évènement R_k.

b. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(R_k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T = k).$$

*On pourra utiliser le résultat de la Question **3.***

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T = n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(R_k \cap \left(\bigcap_{j=k+2}^{n} [S_j - S_{k+1} \leqslant 0]\right) \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1]\right).$$

d. Obtenir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T = n+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(T = k)\mathbf{P}(T = n-k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T = k)\mathbf{P}(T = n-k).$$

13. **a**. Montrer, à l'aide de la question précédente et de la Question **4.b.** que, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T=k)\mathbf{P}(T=n-k) \right) t^n,$$

où G_T désigne la fonction associée à T comme dans la Question **1.** de la **Partie 1**.

b. Montrer alors que, pour tout $t \in [0,1]$: $tG_T(t)^2 = 2G_T(t) - t$.

c. En déduire que $G_T(1) = 1$ puis que $\mathbf{P}(T=-1) = 0$.
On vient de montrer que, presque sûrement, il existe un entier n tel que $[S_n = 1]$ est réalisé.

d. Montrer que : $\lim_{t\to 1} G_T'(t) = +\infty$.

14. **Simulations sous** `Python`.

a. Écrire une fonction d'en-tête `def simul_T():` qui renvoie une simulation de T.

b. On ajoute les commandes ci-dessous dont l'exécution permet l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer à propos de T ? (*On commencera par préciser ce que fait la fonction* `mystere`.)

```
def mystere(N):
    ech=np.zeros(N)
    for k in range(N):
        ech[k]=simul_T()
    return np.mean(ech)


for k in range(7):
    print(mystere(1000))
```

Affichage Python

```
> > >
67.88
1246.38
285.62
8181.62
31.36
4394.42
117.58
```

c. Émettre une conjecture sur le lien entre l'existence éventuelle de l'espérance de T et les propriétés de la fonction G_T.

●

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1222 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECG chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Algèbre bilinéaire
- Éléments propres et réduction
- Fonctions de n variables : continuité et calcul différentiel
- Compléments d'algèbre linéaire
- Compléments sur les variables aléatoires réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Probabilités sur un univers fini
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ecg