Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 2007, filière ECT

## Mathématiques ESC

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

**Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.**

Copie ressaisie du sujet, sans la page de garde du concours : la date et la durée de l'épreuve n'y figurent pas ; le contenu des trois exercices est conservé.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2007/maths-esc

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

**ESC Maths 2007 T** **EXERCICE 1**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les produits matriciels $A(A - I)$ et $B(B - I)$ .

   (b) En déduire que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

   (c) Calculer $AB$ ainsi que $BA$ ( ces deux produits donnent un résultat simple ) .

On note dans toute la suite $W = A + 2B$ .

2. (a) Calculer les produits $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire que $W\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice $W$ est-elle inversible ?

   (c) Montrer que $W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et retrouver le résultat précédent par méthode du pivot .

3. (a) En utilisant les relations obtenues en question 1. , montrer que $W^2 = A + 4B$ .

   (b) Plus généralement , montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul :

   $W^n = A + 2^n B$.

Dans toute la suite de cet exercice on note pour tout réel $x$ la matrice $H(x) = A + xB$.

4. (a) Calculer le produit $H(x)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice $H(x)$ n'est pas inversible .

   (b) Montrer que pour tous réels $x$ et $y$ , $H(x)\,H(y) = H(xy)$.

   (c) En déduire par récurrence sur $n$ que pour tout entier naturel $n$ non nul : $(H(x))^n = H(x^n)$ .
   Quelle relation retrouve-t-on en prenant $x = 2$ ?

## EXERCICE 2

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} \quad \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. (a) Montrer que $f$ est continue sur $]-\infty ; 0]$ et sur $]0 ; +\infty[$ .

   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f(t)$ puis en déduire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $\theta$ un réel de l'intervalle ] 0 ; 1 [ . Montrer que : $\theta - \theta^3 \geq 0$ .

(d) Montrer que si $t > 0$ alors $e^{-\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle ] 0 ; 1 [ .

En déduire grâce à la question (c) , et en posant $\theta = e^{-\frac{2}{3}t}$ , que $f(t) \geq 0$ .

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel $x$ : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ .

2. (a) Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$ ?

Justifier que si $x > 0$ , $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

(b) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif et pour tout réel $a$ strictement positif ,

$$\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1}{a}(1-e^{-ax}) .$$

(c) En déduire que pour tout réel $x$ strictement positif : $F(x) = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ .

On considère alors une variable aléatoire $X$ admettant une densité $f$ , et de fonction de répartition $F$ .

3. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée **( E )** :

$$P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \qquad \textbf{( E )}$$

équation dont l'inconnue est le réel $\mu$ strictement positif .

(a) Justifier que pour tout réel $x$ , $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$ .

En déduire que l'équation **( E )** est équivalente à l'équation **( E' )** :

$$P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \qquad \textbf{( E' )}$$

(b) Montrer que **( E' )** $\Leftrightarrow$ $1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$ .

(c) Montrer que la fonction $g$ définie sur ] 0 ; 1 [ par : $g(\theta) = 1 - 3\theta + \theta^3$
réalise une bijection de ] 0 ; 1 [ sur ] -1 ; 1 [ .

(d) En déduire par le même changement de variable qu'au 1. (d)
que l'équation **( E )** admet une et une seule solution ( qu'on ne cherchera pas à calculer ).

# EXERCICE 3

Un sac $S$ contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.
Les parties **A** , **B** et **C** de cet exercice sont indépendantes , elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac mentionné ci-dessus .

## Partie A

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de $S$ , la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est : $p = \frac{3}{10}$ . ( On pourra conserver cette notation dans la suite de cette partie A ) .

2. Dans cette question on considère le sac $S$ et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise ( les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac $S$ avant le tirage des deux jetons suivants ) .

   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2 .

   (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ .
   ( On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k$ de $X(\Omega)$ ).

   (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = (21)^2$ .

3. (a) On décide d'une approximation de $X$ par une variable $T$ suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .
   Quelles valeurs donner à $m$ et $\sigma$ pour que $X$ et $T$ aient même espérance et même variance ?

   (b) Calculer alors la probabilité $P(588 < T \leq 672)$ en utilisant la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale centrée réduite . ( On donne $\Phi(2) \approx 0{,}97725$ )

## Partie B

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac $S$ . On désigne par $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois .

1. (a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi classique .

   (b) En déduire $Y(\Omega)$ puis la probabilité $P(Y = k)$ pour tout entier $k$ de $Y(\Omega)$ .

2. (a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de $Z$ .

   (b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de $Y$.

## Partie C

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac $S$ .

On désigne par $X_1$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés ,
et par $X_2$ la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés .

1. Donner la loi de probabilité du couple $(X_1, X_2)$ , en présentant les résultats dans un tableau à double entrée .

2. En déduire la loi de probabilité de $X_1$ et celle de $X_2$ .

3. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Variables aléatoires à densité
- Compléments d'intégration
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Variables aléatoires discrètes infinies
- Couples de variables aléatoires discrètes finies

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect