Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2008, filière ECT

Mathématiques ESC

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2008/maths-esc

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

Code sujet
294
ESC_MATT

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 14 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie A :

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et que pour tout entier naturel k, $A^k = PD^kP^{-1}$.
4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire par récurrence que pour tout entier naturel k : $A^kX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k \\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k \\ 1 - \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^k \end{pmatrix}$.

Partie B :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée " semaine 1 ").
Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A , B et C.
On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n , alors la semaine $n+1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de 1/3 ou le dessert C avec une probabilité de 2/3 .
- Si M a choisi le dessert B la semaine n , alors la semaine $n+1$ il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de 1/3 ou le dessert B avec une probabilité de 2/3.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n , il reprend le dessert C la semaine $n+1$.
- Le consommateur M choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

A_n l'événement : " M a choisi le dessert A la n - ième semaine " .
B_n l'événement : " M a choisi le dessert B la n - ième semaine " . On note aussi : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.
C_n l'événement : " M a choisi le dessert C la n - ième semaine " .

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, ainsi que les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$
   $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.

2. A l'aide de la formule des probabilités totales , justifier avec soin que $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$.
   Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_n = A^{n-1}X_1$.

4. En déduire, en fonction de n , la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$. On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$.

1. (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g.

   (b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α. Justifier que $1 < \alpha < 2$.

   (d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.

   (e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g, en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x = 1$, $x = \alpha$, $x = 2$.

2. (a) Montrer grâce à une intégration par parties que : $\int_1^{\alpha} \ln x \, dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$.

   (b) En utilisant la relation vérifiée par α, montrer que : $\int_1^{\alpha} g(x)dx = \dfrac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$.

   (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1. (e).

On définit maintenant une suite qui déterminera une valeur approchée du réel α obtenu en question 1.(c).

A cet effet on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)}$.

3. (a) On note pour tout réel $x \in [1 ; 2]$, $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$. Vérifier que h est dérivable sur $[1 ; 2]$ et que pour tout réel $x \in [1 ; 2]$, $h'(x) = -\dfrac{1}{2xh(x)}$ puis donner le tableau des variations de h avec les valeurs aux bornes.

   Justifier que $\sqrt{2} \leq 2$, que $\sqrt{2 - \ln 2} \geq 1$ et que pour tout $x \in [1 ; 2]$, $h(x) \in [1 ; 2]$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n : u_n existe et $u_n \in [1 ; 2]$.

   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [1 ; 2]$, $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

   Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \leq (\dfrac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est le réel α.

EXERCICE 3

Une usine fabrique des ampoules , dont 50% proviennent d'une machine M_1 , 30% proviennent d'une machine M_2 et 20% proviennent d'une machine M_3 .

La probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse est différente selon les machines :
Elle vaut $\frac{3}{100}$ pour M_1 , $\frac{5}{100}$ pour M_2 et $\frac{15}{100}$ pour M_3 .

Pour $k = 1, 2, 3$ on notera l'événement F_k : " l'ampoule qu'on examine a été fabriquée par M_k ".

Les fonctionnements des trois machines seront toujours supposés indépendants .

1. (a) Donner $P(F_3)$, probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait été fabriquée par M_3 .

   (b) Montrer que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est $0,06$.

   (c) On suppose ici qu' une ampoule choisie au hasard s'est révélée défectueuse.
   Quelle est la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par M_3 ?

Dans toute la suite on note n un entier naturel non nul .

On suppose dans toute la suite qu'on examine un lot choisi au hasard de n ampoules fabriquées par cette usine .

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses dans ce lot .

2. Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres .

   Préciser $X(\Omega)$ et exprimer la probabilité $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

   Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses dans le lot ?

3. Dans cette question seulement on suppose que $n = 14100$ et on décide d'approcher la loi de X en utilisant une variable Z qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2 .

   (a) Justifier que $m = 846$ et $\sigma = \frac{141}{5}$.

   (b) A l'aide de cette approximation et sans tenir compte de la correction de continuité , calculer une valeur approchée de la probabilité que X prenne une valeur comprise entre 818 et 874 (on utilisera la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite) .

   On donne les valeurs numériques : $\frac{140}{141} \approx 0,99$ et $\Phi(0,99) \approx 0,839$.

4. Dans cette dernière question on suppose que $n = 7$ et que les sept ampoules choisies sont sans défaut .

   On suppose également que le temps de fonctionnement d'une ampoule sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$. On branche ces 7 ampoules au même moment .

   On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel les sept ampoules vont fonctionner .

   (a) Justifier que pour tout réel t positif, $P(T > t) = (e^{-0,2t})^7$.

   (b) En déduire que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre, puis donner l'espérance et la variance de T.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Probabilités sur un univers fini
- Suites réelles
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Variables aléatoires à densité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect