Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2009, filière ECT

Mathématiques T ESCP

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Exercice 4

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2009/maths-escp

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conception : E.S.C.P – E.A.P.

285

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

CCIP_MATT

Mardi 5 mai 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
Dans les exercices 1 et 3, la notation ln *désigne le logarithme népérien.*

Exercice 1

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, par la relation : $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. (a) On note f' la dérivée de f. Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   (b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

5. (a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$.

   (b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

6. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = \frac{1}{2}$

Exercice 2

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$, et pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On dispose de trois urnes numérotées 1,2 et 3, qui contiennent chacune deux boules.
- L'urne numéro 1 contient deux boules blanches.
- L'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge.
- L'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne « au hasard », puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule *avec remise*, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note U_k l'événement : « On choisit l'urne numéro k ».
Par suite, on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.
On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche.
On attribue à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

   (b) Justifier les résultats suivants : $P_{U_1}([X = 1]) = 1$, $P_{U_2}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ et $P_{U_3}([X = 1]) = 0$.

   (c) En utilisant le théorème des probabilités totales, établir la relation : $P([X = 1]) = \frac{1}{2}$.

2. (a) Justifier que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, on a : $P_{U_1}([X = j]) = 0$ et $P_{U_3}([X = j]) = 0$.

   (b) Calculer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P_{U_2}([X = j])$.

   (c) Montrer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, la relation : $P([X = j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$.

3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P([X = 0])$. Proposer une interprétation de ce dernier résultat.

4. *On rappelle que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a :* $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   (a) Justifier l'existence de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

   (b) Calculer $E(X)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Écrire une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (e) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion. Déterminer les coordonnées de ce point.
2. Pour tout réel y supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :
   $F_n(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{\ln(x)}{x^n} dx$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $F_n(y)$ en fonction de y et n.
   (b) Montrer que $F_n(y)$ a une limite quand y tend vers $+\infty$; on la note L_n.
   Établir la formule : $L_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.
3. Soit α un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \alpha f(x) \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   Déterminer la valeur du réel α pour que g soit une densité de probabilité.
4. Le réel α ayant la valeur trouvée précédemment, on considère une variable aléatoire X admettant g pour densité.
   Pour tout réel y supérieur ou égal à 1, on pose : $G(y) = \displaystyle\int_1^y xg(x)dx$.
   (a) Établir la formule : $G(y) = \dfrac{1}{2}(\ln(y))^2$.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ?

Exercice 4

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit a, b, x, y, quatre réels qui vérifient : $aA + bI = xA + yI$. Montrer que $a = x$ et $b = y$.
2. (a) Calculer A^2 en fonction de A et I.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$. (On rappelle que, pour toute matrice carrée P, on a $P^0 = I$).
   On vérifiera, pour tout entier naturel n, les relations : $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.
3. (a) Si l'on suppose que pour un certain entier naturel n, u_n et v_n sont positifs, montrer que u_{n+1} et v_{n+1} sont également positifs.
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.
4. (a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
5. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$.

6. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les relations :

$$\begin{cases} u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \\ u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} \end{cases}$$

7. Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose : $d(M) = ad - bc$.

   (a) Soit a, b, c, d, x, y, z, t, huit réels quelconques. On considère les deux matrices : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer le produit MN ainsi que $d(MN)$.

   (b) Montrer que $d(MN) = d(M) \times d(N)$.

   (c) Établir par récurrence, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule : $d(M^n) = [d(M)]^n$.

8. En utilisant le résultat précédent, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Réels, sommes et produits
- Variables aléatoires discrètes infinies
- Probabilités sur un univers fini
- Sommes finies et séries numériques
- Compléments d'intégration
- Variables aléatoires à densité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect