Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 2011, filière ECT

## Mathématiques T ESCP

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Exercice 4

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2011/maths-escp

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

## CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

**Conception : E.S.C.P. / EUROPE**

Code épreuve :

**285**

**OPTION TECHNOLOGIQUE**

# MATHEMATIQUES

Lundi 9 mai 2011, de 8 h. à 12 h.

---

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*

## Exercice 1

Soit $A$, $J$, $K$ et $I$ les quatre matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $K^2$ et $K^3$.
   (b) Déterminer $K^n$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 3.
2. (a) Exprimer $A$ en fonction de $I$ et $K$.
   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $A^n$ en fonction des matrices $I$, $K$, $K^2$ et de $n$.
   (c) En déduire pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice $A^n$ en fonction de $n$.
   (d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. Montrer que $A$ est inversible. On note $A^{-1}$ la matrice inverse de $A$.
4. *Une première façon de calculer $A^{-1}$.*
   (a) Calculer $J^2$, et pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 3, calculer $J^k$.
   (b) Exprimer $A$ en fonction des matrices $I$, $J$ et $J^2$.
   (c) Calculer $(I + 2J + 3J^2)(I - 2J + J^2)$.
   (d) En déduire la matrice $A^{-1}$.
5. *Une deuxième façon de calculer $A^{-1}$.*
   (a) Calculer les matrices $A^2$ et $A^3$.
   (b) Quelle est la matrice $A^3 - 3A^2 + 3A$ ?
   (c) En déduire l'écriture de $A^{-1}$ en fonction de $I$, $A$ et $A^2$.
   (d) Vérifier que ce dernier résultat est cohérent avec celui établi à la question 4.d).

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par :

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Les dérivées première et seconde de $f$ sont notées respectivement, $f'$ et $f''$.

1. Déterminer pour tout réel $x$ strictement positif, l'expression de $f'(x)$.
2. (a) Quelle est la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ ?
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. (a) Donner le tableau de variation de la fonction $f$ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire que pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x)$ est strictement positif.
4. (a) Déterminer pour tout réel $x$ strictement positif, l'expression de $f''(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction $f'$.
   (c) Établir pour tout réel $x$ de $[1, 2]$, les inégalités suivantes :
   $$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
   (d) À l'aide d'une inégalité des accroissements finis, établir pour tout $x$ de $[1, 2]$, l'encadrement suivant :
   $$0 \leqslant f(x) - 1 \leqslant \frac{1}{2}(x - 1)$$
5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $[1, 2]$.
   (b) En déduire pour tout entier naturel $n$, les inégalités suivantes :
   $$0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$$
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel $n$, l'encadrement suivant :
   $$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Exercice 3

On considère la matrice $M$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :
• si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
• si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.
Pour tout entier $i$ supérieur ou égal à 1, on note $B_i$ (respectivement $R_i$) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on note $X_n$ le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.
On note enfin $T_1$ le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et $T_2$ le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que $X_n$, $T_1$ et $T_2$ sont des variables aléatoires définies sur cet espace ($\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de $\Omega$, c'est-à-dire l'ensemble des événements).
On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer pour tout entier naturel $n$, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_n$ (on distinguera les trois cas : $n = 0$, $n = 1$ et $n \geqslant 2$ ).

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :
   $$U_{n+1} = MU_n.$$
   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

   (c) Calculer $MV_1$, $MV_2$ et $MV_3$.

   (d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel $n$, la relation suivante :
   $$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

   (e) Donner la loi de la variable aléatoire $X_n$.

2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de $X_n$, ainsi que sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

3. Reconnaître la loi de $T_1$.

4. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements $B_i$ et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

5. (a) Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a :
   $$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

## Exercice 4

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \text{ si } x \geqslant 1 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. (a) Calculer pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, l'intégrale $I_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^3} dx$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} I_A$.

   (c) En déduire que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité.

*On considère dans la suite, une variable aléatoire $X$ admettant $f$ comme densité et on note $F_X$ sa fonction de répartition.*

2. Déterminer pour tout réel $x$, $F_X(x)$.

3. (a) Calculer pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, l'intégrale $J_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^2} dx$. En déduire que $X$ admet une espérance et donner sa valeur.

   (b) Calculer pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, l'intégrale $K_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x} dx$. La variable aléatoire $X$ admet-elle une variance ?

4. On considère la variable aléatoire $Y$ définie par $Y = \ln(X)$ et on note $F_Y$ sa fonction de répartition.

   (a) Établir pour tout réel $x$, l'égalité suivante : $F_Y(x) = F_X(e^x)$.

   (b) Donner, en distinguant les cas $x$ positif et $x$ négatif, l'expression de $F_Y(x)$.
   Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y$.

   (c) Donner sans calcul, la valeur de l'espérance de $Y$.

*On considère dans la suite, deux variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ indépendantes et suivant la même loi que $X$.*

5. On pose $Z = \sup(X_1, X_2)$, c'est-à-dire que pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x])$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de $Z$, notée $F_Z$.

   (b) En déduire une densité $h$ de $Z$.

6. On pose $T = \inf(X_1, X_2)$, c'est-à-dire que pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$\mathbb{P}([T > x]) = \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x])$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_T$ de $T$.

   (b) En déduire une densité $g$ de $T$.

   (c) Calculer pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A tg(t)dt$.

   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_1^A tg(t)dt$.

   (e) Donner la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $T$.

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Suites réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Variables aléatoires discrètes infinies
- Variables aléatoires à densité
- Compléments d'intégration

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect