Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

Session 2015, filière ECT

Mathématiques T ESCP

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Exercice 4

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2015/maths-escp

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

MATHÉMATIQUES

OPTION : TECHNOLOGIQUE

Mercredi 6 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

- *L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*
- *La probabilité d'un événement B est notée $P(B)$.*

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.
   b) Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   c) Calculer $f(1)$.

2.a) Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'inégalité : $f(x) \geqslant \mathrm{e} \times \ln x$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3.a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité : $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \times \ln x$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

Tournez la page S.V.P.

5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et e cm pour les ordonnées). On rappelle que le nombre e est à peu près égal à 2,7.

   a) On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.

   b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.

   c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

   d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

6.a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\,dt = n$.

   b) En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.

   a) La matrice M est-elle inversible ?

   b) Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.

2. Dans cette question, on choisit $a = b$.

   a) La matrice M est-elle inversible ?

   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $M^n = (1 + a)^{n-1}M$.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
   Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.

   Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : " la matrice N est inversible " .

   a) Établir la relation : $P\big([X = Y]\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X = k]\big) \times P\big([Y = k]\big)$.

   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.

   c) En déduire $P(A)$ en fonction de q.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

   Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : " la matrice N est inversible ".

   a) Pour x réel, écrire les développements de $(x + 1)^n$ et $(x + 1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.

   b) En utilisant l'identité $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n(x + 1)^n$, montrer que l'on a : $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

c) En déduire la relation : $P([X=Y]) = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

d) Calculer $P(A)$ en fonction de n.

EXERCICE 3

1. Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Donner sans calcul les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

   a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X à densité.

   b) En utilisant la question 1, montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et donner sa valeur.
3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

   Montrer que l'on a : pour tout x réel, $F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que X.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \min(X_1, X_2)$.

4.a) Justifier que pour tout x réel, on a : $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$.

   b) Déterminer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z.

   c) Montrer qu'une densité h de Z est donnée par : $h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

   a) Pour tout x réel, calculer $g'(x)$.

   b) En déduire que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z est égale à $\dfrac{5}{4}$.
6. Soit W la variable aléatoire définie par $W = \max(X_1, X_2)$.

   a) Exprimer la variable aléatoire $Z + W$ en fonction de X_1 et X_2.

   b) En déduire la valeur de l'espérance $E(W)$ de la variable aléatoire W.

   c) Exprimer la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$ en fonction de Z et W.

   d) En déduire la valeur de l'espérance $E(|X_1 - X_2|)$ de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

EXERCICE 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2\,u_{n+2} - \frac{5}{4}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n.$$

Tournez la page S.V.P.

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.

2.a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = A\,X_n$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel n, la relation : $X_n = A^n X_0$.

3. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose : $N = T - D$.

a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice N^k.

b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5.a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1197 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivation (et convexité en ECT1)
- Compléments d'intégration
- Suites réelles
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Variables aléatoires discrètes infinies
- Sommes finies et séries numériques
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Variables aléatoires à densité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect