Banque commune d'épreuves des écoles de management (BCE), France

# Session 2017, filière ECT

## Mathématiques T ESCP

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Exercice 4

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/bce/ect/2017/maths-escp

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 285**

## Conception : ESCP Europe

OPTION TECHNOLOGIQUE

# MATHÉMATIQUES

Mercredi 3 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*

**EXERCICE 1.**

Soit $M$ et $I$ les matrices d'ordre 3 définies par : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a) Calculer $M^2$ et $M^3$ et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $M$ n'est pas inversible.

b) Pour tout entier $n \geqslant 3$, déterminer $M^n$.

c) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $(I - M)$ est inversible et donner son inverse $(I - M)^{-1}$.

d) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice $M$.

e) En déduire la seule valeur propre possible de $M$.

2. On pose : $S = M + I$.

a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, la matrice $S^n$ en fonction de $I$, $M$ et $M^2$.

b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice $S^n$.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1\ w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}.$$

a) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

c) Exprimer $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.



**Tournez la page S.V.P.**

4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice $J$ d'ordre 3, triangulaire supérieure, à cœfficients diagonaux tous nuls et une matrice $P$ d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation : $J = PMP$.

   a) On pose : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices colonnes $V$ et $W$ définies par : $V = -MU$ et $W = M^2U$.

   b) Soit $P$ la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est $W$, la deuxième est $V$ et la troisième est $U$. Calculer $P^2$ ; en déduire que $P$ est inversible et donner son inverse $P^{-1}$.

   c) Expliciter la matrice $J = PMP$.

**EXERCICE 2.**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$ et $v_2 = \dfrac{4}{3}$, puis calculer $u_3$ et $v_3$.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont décroissantes et convergentes.
4. On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et en déduire une relation entre $\ell$ et $\ell'$.

   b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, montrer que $\ell\,\ell' = -1$.

   c) Déterminer $\ell$ et $\ell'$.

5. Recopier et compléter les lignes (6) et (7) du programme *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs de $u_n$ et $v_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) u=1
(3) v=2
(4) for k=2:n
(5)     a=u
(6)     u= .........
(7)     v= .........
(8) end
(9) disp(u)
(10) disp(v)
```

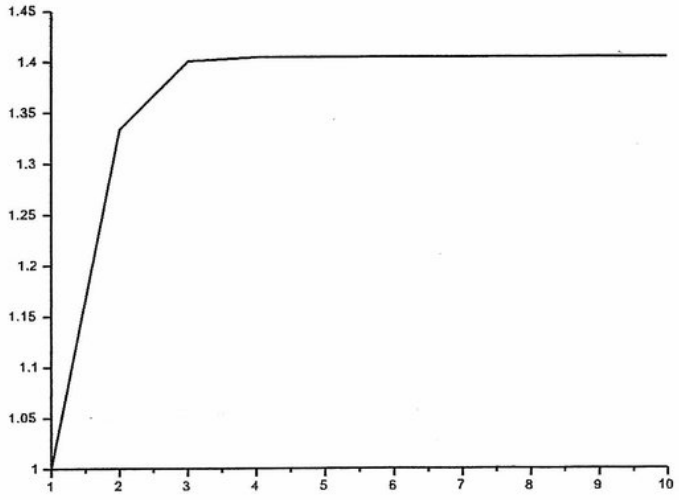
6. On considère le programme précédent avec les instructions supplémentaires :

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) u=1
(3) v=2
(4) s=ones(1,n)
(5) for k=2:n
(6)     a=u
(7)     u= .........
(8)     v= .........
(9)     s(k)=u
```

(10) `end`
(11) `disp(u)`
(12) `disp(v)`
(13) `x=1:n`
(14) `y=cumsum(s)`
(15) `plot2d(x,y)`

a) Que contiennent les variables s et y à l'issue du programme ?

b) Ce programme fournit la sortie graphique suivante pour la valeur $n = 10$.




Quel résultat ce graphique permet-il de conjecturer ?

**EXERCICE 3.**

*La probabilité d'un événement $A$ est notée $P(A)$ et sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $U$ sont notées respectivement $E(U)$ et $V(U)$.*

Soit $a$ un réel vérifiant $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
   *Dans la suite de l'exercice, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité et on suppose que le paramètre $a$ est inconnu.*
2. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X) = \frac{4 - 3a^2}{12}$.
3. Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de la variable aléatoire $X$.
4. Pour $n$ entier de $\mathbf{N}^*$, on considère $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la même loi que $X$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Montrer que la variable aléatoire $Y_n = 2\,\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais du paramètre $a$.

   b) En déduire le risque quadratique de $Y_n$ en tant qu'estimateur de $a$.

   c) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y_n$, établir l'inégalité :
   $$P\big([|Y_n - a| \leqslant \varepsilon]\big) \geqslant 1 - \frac{4}{3n\varepsilon^2}.$$



**Tournez la page S.V.P.**

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires $Z_n$ et $T_n$ par :

- $Z_n$ est le nombre de variables aléatoires parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui prennent des valeurs inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$ ;
- $T_n$ est le nombre de variables aléatoires parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui prennent des valeurs strictement supérieures à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $W_n = 1 + \frac{2}{n}(T_n - Z_n)$.

a) Justifier que $Z_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$ et que $T_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$.

b) Vérifier que $W_n$ est un estimateur sans biais de $a$.

c) Que vaut $T_n + Z_n$ ? En utilisant la valeur de $V(T_n + Z_n)$, calculer $\mathrm{Cov}(T_n, Z_n)$.

d) En déduire la valeur de $V(W_n)$. Calculer le risque quadratique de $W_n$ en tant qu'estimateur de $a$. Quelle est la limite de ce risque quadratique lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

**EXERCICE 4.**

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1.a) Établir pour tout $x \in [0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On note $f'$ la dérivée de $f$.

a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $f'(x)$.

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

3.a) En utilisant l'identité $x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2} = x^{n+1} \times x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel $n$, la relation : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

b) Déterminer la limite de $nI_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \times \frac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

b) Donner sous forme de somme, l'expression de $I_{2n+1}$ en fonction de $n$.

c) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $I_{2k+1} = k\,I_{2k-1} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$. À l'aide de cette relation et de la valeur de $I_1$, compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de $I_{2n+1}$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) I=1/2-1/(2*%e)
(3)   for k=1:n
(4)   I=.........
(5) end
(6) disp(I)
```

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Matrices carrées : inverse et puissances
- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Sommes finies et séries numériques
- Variables aléatoires à densité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Couples de variables aléatoires discrètes finies
- Compléments d'intégration

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/bce/ect