Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2003, filière MP

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : exercice préliminaire
- Partie II : distances aux matrices symétriques et antisymétriques
- Partie III : décomposition polaire et distance au groupe orthogonal
- Partie IV : distance aux matrices de rang au moins p
- Partie V : théorème de Courant-Fischer et distance aux matrices de rang au plus p

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2003/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'usage des calculatrices est interdit

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée, $rang(A)$ son rang et $Tr(A)$ sa trace.
I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.
Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,
dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.
La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf_{M\in\Pi} \|A-M\|$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A,\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6. Calculer $d(\Gamma,\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, .., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1t}AAP = P^{-1t}BBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A-\Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S,\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que, $d(A,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

14. On note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D-\Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2Tr(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $Tr(D\Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15. Montrer que , $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p.

17. Un résultat de densité.

a. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ estinversible.

b. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leqslant n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p.

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant .. \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$, P la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PD{}^tP$ et $C_1, C_2, .., C_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P.
Si k est un entier entre 1 et n, on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Nous allons montrer que :
$\lambda_k = \max\limits_{F \in \Psi_k} \min\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$. (théorème de Courant et Fischer).

19. Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, .., x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, .., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i et λ_i. (i compris entre 1 et n) : ${}^tXAX$ et ${}^tXX$ et pour k entier entre 1 et n, $\dfrac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k}$.

20. Soit k entier entre 1 et n, on pose $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, .., C_k\}$. Montrer que pour tout X non nul de F_k , $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

21. Soit $F \in \Psi_k$

a. montrer que $dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}) \geqslant 1$.

b. Si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}$, montrer que $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_k$.

22. Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = EDP$. En déduire que le rang de la matrice ${}^tAA$ est encore r. (On pourra utiliser les résultats de la question **9.**)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle ${}^tAA$ de rang r : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$, si on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, .., \sqrt{\mu_r}, 0..., 0)$, si pour $1 \leqslant l \leqslant n$ on note M_l la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l-ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question **23.**, tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, .., R_n)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = Tr({}^tAB)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que $A = \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l$.

25. Avec les notations de la question **24.**, on pose $N = \sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} R_l$.
Montrer que $\text{rang}(N) \leqslant p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leqslant \sqrt{\mu_{p+1} + .. + \mu_r}$.

26. Soit M une matrice de rang p $(p < r)$, on note $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A-M)(A-M)$ et on pose $G = \text{Ker}M \cap \text{Im}({}^tAA)$.
Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

a. Montrer que $\dim G \geqslant r - p$.

b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k, montrer que : $\alpha_k \geqslant \min_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tX {}^tAAX}{{}^tXX}$.

c. On note $(V_1, V_2, .., V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice ${}^tAA$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, .., V_{k+p}\}) \geqslant k$.

d. En déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

27. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp