Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2010, filière MP

## Mathématiques 2

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : questions préliminaires
- Partie II : exponentielle d'une matrice diagonalisable
- Partie III : un cas non diagonalisable
- Partie IV : distances et projecteurs orthogonaux

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2010/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

# MATHEMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

*Les calculatrices* ***sont autorisées****.*

* * *

*NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

* * *

## QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

**Notations et objectifs :**

Dans tout le texte $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de $E$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille $n$.

Si $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur $E_1$ parallèlement à $E_2$ l'endomorphisme $p$ de $E$ qui, à un vecteur $x$ de $E$ se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur $x_1$.

On rappelle que si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de $A$ est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si $u$ est un endomorphisme de $E$, l'exponentielle de $u$ est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

## I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démontration, une condition suffisante pour que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

## II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r,$$

où $r$ désigne un entier vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
   On considère l'application linéaire $\phi$ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_r)).$$

   Déterminer le noyau de $\phi$, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme $L$ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.
4. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on définit le polynôme $l_i$ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de $i$ et $j$ dans $\{1, \ldots, r\}$.
   (b) En déduire une expression du polynôme $L$ comme une combinaison linéaire des polynômes $l_i$ avec $i \in \{1, \ldots, r\}$.
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
   (b) En déduire que :

$$\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}.$$

6. Déduire des questions **3.** et **5.** que $\exp(A) = L(A)$.
7. On suppose que $E$ est munie d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par $v$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est $A$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $v$, et $x$ un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$
8. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_i = \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de $v$ associé à $\lambda_i$.
   (a) Démontrer que l'endomorphisme de $E$, $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur $E_i$, parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} E_k$ (on dit que les $p_i$ sont les projecteurs spectraux de $v$).
   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

## III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

9. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
12. On considère les endomorphismes de $E$ : $p = (u - \mathrm{id})^2$ et $q = u \circ (2\,\mathrm{id} - u)$. Calculer $p + q$.
13. Démontrer que l'endomorphisme $p$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2$. Que dire de l'endomorphisme $q$ ?
14. Soit $x$ un élément de $E$.
   (a) Préciser $(u - 2\,\mathrm{id})\,(p(x))$.
   (b) Déterminer un nombre réel $\alpha$ tel que pour tout entier naturel $k$, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
   (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où $\beta$ est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geqslant 2$, $(u - \mathrm{id})^k \circ q$ ?
    Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où $\gamma$ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\mathrm{id}) \circ \exp(u - \mathrm{id})$ ).
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en $u$.

## IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace $E$ est muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$, est définie par :
$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur $F$, noté $p_F$ le projecteur sur $F$, parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si $x$ est un vecteur de $E$, la distance euclidienne de $x$ à $F$, notée $\mathrm{d}(x, F)$ est le réel :
$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\| \quad | \quad y \in F\}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $x$ un vecteur de $E$. Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $\mathrm{d}(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.

18. *Cas des hyperplans* : soit $n$ un vecteur non nul de $E$ et $H$ l'hyperplan de $E$ orthogonal à $n$, c'est à dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{n\})^{\perp}$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $< x, n >$ et de $\|n\|$.

19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$< A, B > = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note $H$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

(a) Justifier que $H$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^{\perp}$.

(b) Si $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M, H)$.

20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée $N_\infty$ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,\{(1, 0)\}$ et $x = (1, 1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur $x$ à $F$, c'est-à-dire le réel :

$$\mathrm{d}_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \quad | \quad y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs $m$ pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $\mathrm{d}_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

**Fin de l'énoncé**

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries entières
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Topologie des espaces vectoriels normés

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp