Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2011, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : commutant d'une matrice
- Problème, partie I : matrices symétriques positives
- Problème, partie II : théorème de réduction simultanée
- Problème, partie III : décomposition de Cholesky et inégalité d'Hadamard

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2011/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours Communs Polytechniques 2011

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Les candidats peuvent utiliser la calculatrice pour faire leurs calculs et donner directement la réponse sur la copie.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants.

Exercice
Commutant d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de la matrice A.

1. Démontrer que, pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.
2. Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.
3. Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T. Déterminer sa dimension.
4. Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?
5. (a) Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?
   (b) Démontrer alors que $C(A) = \text{Vect}\left\{I_3, A, A^2\right\}$.
   (c) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A.
   Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Problème
Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Dans ce problème, on note pour n entier naturel non nul :
– S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
– S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
– S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que, si x_1, x_2, …, x_n sont n réels positifs, $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

1. *Question préliminaire*

   On rappelle qu'une matrice S appartient à S_n^+, si S appartient à S_n et si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$.

   Démontrer qu'une matrice S de S_n est élément de S_n^+ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

Partie I

2. Soit $S \in S_n^+$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det S} \leq \dfrac{1}{n}\text{trace } S$.
3. Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer que ${}^tMM \in S_n^+$.
   (b) Si $M = (m_{i,j})$, en déduire l'inégalité $(\det M)^2 \leq \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \left(\displaystyle\sum_{i=i}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^n$.

Partie II : **Théorème de réduction simultanée**

4. On se donne deux matrices $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, dans cette base, A est la matrice d'un produit scalaire φ. On note l'espace euclidien $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E et R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
   (a) Justifier que $I_n = {}^tRAR$.
   (b) On note $C = {}^tRBR$, justifier qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que ${}^tQCQ = D$.
   (c) Déterminer, en fonction des matrices R et Q, une matrice inversible P telle que :

   $$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP \qquad \text{(théorème de réduction simultanée).}$$

   (d) Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Démontrer qu'une matrice inversible P telle que la matrice ${}^tPBP$ soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.

   On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice B.

5. Démontrer l'inégalité « $\det(A+B) \geq \det A + \det B$ » dans les deux cas suivants :
   (a) $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^+$, en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous les $\lambda_i \geq 0$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.
   (b) $A \in S_n^+$ et $B \in S_n^+$, en démontrant d'abord que $A + B \in S_n^+$ et en considérant les cas où les matrices sont dans S_n^+ sans être dans S_n^{++}.
6. Soient A et B deux matrices de S_n^{++} et $t \in [0,1]$. On note P une matrice inversible et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.
   (a) Exprimer $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det P$, t et les λ_i.
   (b) En utilisant la fonction ln, démontrer que, pour tout i entier compris entre 1 et n, $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$.
   (c) Démontrer que $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.
7. Si A est une matrice de S_n^{++} et B une matrice de S_n^+, on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$) le résultat suivant qui est admis :

   $$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

(a) Démontrer que S_n^{++} est dense dans S_n^+.

(b) Démontrer l'inégalité ci-dessus pour A et B deux matrices de S_n^+.

Partie III : **Théorème de Choleski**

8. Si A est une matrice de S_n^{++}, il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T, vérifiant $A = {}^tTT$ (décomposition de Choleski).

   On ne demande pas de prouver ce résultat.

   (a) On se propose de démontrer que cette matrice T est unique.

   Si on pose $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, démontrer que $T_1T_2^{-1} = I_n$ et conclure.

   On pourra admettre que, si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathcal{T}, \cdot)$ est un groupe.

   (b) Exemple : si $A = (a_{i,j})$, où pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n, $a_{i,j} = \min(i,j)$, donner la décomposition de Choleski de la matrice A.

   On ne demande pas de vérifier que A est une matrice de S_n^{++}.

9. *Un peu d'informatique*

   Pour une matrice A de S_3^{++}, écrire un algorithme en français permettant de trouver la matrice T de la décomposition de Choleski.

   Entrer cet algorithme dans la calculatrice (on ne demande pas le programme sur la copie) puis, pour chacun des cas suivants, donner la matrice T :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}.$$

10. *Inégalité d'Hadamard*

    (a) Soit $S = (s_{i,j}) \in S_n^{++}$, démontrer que $\det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

    (b) Application : démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (a_{i,j})$,

$$|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Dérivabilité et convexité
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp