Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2012, filière MP

## Mathématiques 2

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice : congruences modulo 11
- Problème, partie I : étude du cas n = 2
- Problème, partie II : étude du cas général
- Problème, partie III : noyau de phi_A
- Problème, partie IV : vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2012/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

---

# MATHEMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

Les calculatrices sont autorisées

**Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants.**

## Exercice

**1.** Déterminer le plus petit entier naturel non nul $p$ tel que $3^p \equiv 1$ modulo 11.

**2.** En utilisant des congruences modulo 11, démontrer que, pour tout entier naturel $n$, l'entier $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

## Problème

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et $I_n$ sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ième colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}\,[\mathrm{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$.

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que $P$ annule $A$ lorsque $P(A) = 0$ ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice $A$ le polynôme minimal de l'endomorphisme $u$ ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule $A$.

On note $\varphi_A$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de $\varphi_A$. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de $\varphi_A$, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres. **Les quatre parties sont indépendantes.**

## Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

**1.** Vérifier que l'application $\varphi_A$ est linéaire et que $I_2$ et $A$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Donner la matrice de $\varphi_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

**3.** Donner le polynôme caractéristique de $\varphi_A$ sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

**4.** En déduire que $\varphi_A$ est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

**5.** Démontrer que $\varphi_A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

## Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**6.** On suppose dans cette question que $A$ est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $u$ (défini au début du problème) et, pour tout entier $i$ tel que $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i$ la valeur propre associée au vecteur $e_i$. On note alors $P$ la matrice de passage de la base $c$ à la base $e$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple $(i, j)$ d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1} \ .$$

**(a)** Exprimer, pour tout couple $(i,j)$, la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels $\lambda_i$ et $\lambda_j$.

**(b)** Démontrer que, pour tout couple $(i,j)$, $B_{i,j}$ est un vecteur propre de $\varphi_A$.

**(c)** En déduire que $\varphi_A$ est diagonalisable.

**7.** On suppose dans cette question que $\varphi_A$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de $\varphi_A$ et, pour tout couple $(i,j)$, $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

**(a)** Dans cette question, on considère $A$ comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et $\varphi_A$ comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

**i.** Justifier que toutes les valeurs propres de $\varphi_A$ sont réelles.

**ii.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si $z$ est une valeur propre de $A$, alors $z$ est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

**iii.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $z$ et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice $A$. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(X \neq 0)$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(Y \neq 0)$, tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \bar{z}Y$.

En calculant $\varphi_A(X{}^tY)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de $\varphi_A$.

**(b)** En déduire que la matrice $A$ a au moins une valeur propre réelle.

On note $\lambda$ une valeur propre réelle de $A$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

**(c)** Démontrer que, pour tout couple $(i,j)$, il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de $\lambda$ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

**(d)** En déduire que $A$ est diagonalisable.

## Partie III. Étude des vecteurs propres de $\varphi_A$ associés à la valeur propre 0

Soit $m$ le degré du polynôme minimal de $A$.

**8.** Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

**9.** Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$.

**10.** *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme $u$ (défini au début du problème) est nilpotent d'indice $n$ (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur $y$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier $i$ tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

**(a)** Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

**(b)** Soit $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $B$. Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

**(c)** En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

**11.** *Cas où $u$ est diagonalisable*

On suppose que $u$ est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les $p$ valeurs propres distinctes de $u$ et, pour tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. On note $m_k$ la dimension de cet espace propre.

**(a)** Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $B$. Démontrer que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, pour tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par $v$ (c'est-à-dire $v\left(E_u(\lambda_k)\right) \subset E_u(\lambda_k)$).

**(b)** En déduire que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, la matrice de $v$, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de $u$, a une forme que l'on précisera.

**(c)** Préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

**(d)** Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de $p$ et des $m_k$ (on ne demande pas de justification).

## Partie IV. Étude des vecteurs propres de $\varphi_A$ associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, $\alpha$ est une valeur propre non nulle de $\varphi_A$ et $B$ un vecteur propre associé $(B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ B \neq 0)$. On note $\pi_B$ le polynôme minimal de $B$ et $d$ le degré de $\pi_B$.

**12.** Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

**13.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A\left(P(B)\right)$ en fonction de $\alpha$, $B$ et $P'(B)$.

**14.** Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul ($\pi'_B$ étant le polynôme dérivé du polynôme minimal $\pi_B$ de la matrice $B$).

**15.** En déduire que $B^d = 0$.

**Fin de l'énoncé**



IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1233 – D'après documents fournis

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp