Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2015, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice I : informatique
- Exercice II : projection orthogonale
- Problème, partie préliminaire et première partie
- Problème : objectifs et exemple
- Problème, deuxième partie : cas général en taille 3
- Problème, troisième partie : exemple

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2015/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I. INFORMATIQUE

Les algorithmes demandés doivent être écrits en Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

Voici, par exemple, un code Python attendu si l'on demande d'écrire une fonction nommée `maxi` qui calcule le plus grand élément d'un tableau d'entiers :

```
def maxi(t):
    """Données: t un tableau d'entiers non vide
       Résultat: le maximum des éléments de t"""
    n =len(t) # la longueur du tableau t
    maximum = t[0]
    for k in range(1,n):
        if t[k] >  maximum:
            maximum = t[k]
    return maximum
```

L'instruction `maxi([4,5,6,2])` renverra alors 6.

I.1. Donner la décomposition binaire (en base 2) de l'entier 21.

On considère la fonction `mystere` suivante :

```
def mystere(n, b):
    """Données: n > 0 un entier et b > 0 un entier
       Résultat: ......."""
    t = [] # tableau vide
    while n > 0:
        c = n % b
        t.append(c)
        n = n // b
    return t
```

On rappelle que la méthode `append` rajoute un élément en fin de liste. Si l'on choisit par exemple `t = [4,5,6]`, alors, après avoir exécuté `t.append(12)`, la liste `t` a pour valeur `[4,5,6,12]`.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note c_k, t_k et n_k les valeurs prises par les variables `c`, `t` et `n` à la sortie de la k-ème itération de la boucle "while".

I.2. Quelle valeur est renvoyée lorsque l'on exécute `mystere(256,10)` ?

On recopiera et complétera le tableau suivant, en ajoutant les éventuelles colonnes nécessaires pour tracer entièrement l'exécution.

k	1	2	$\cdots$
c_k			$\cdots$
t_k			$\cdots$
n_k			$\cdots$

I.3. Soit $n>0$ un entier. On exécute `mystere(n,10)`. On pose $n_0=n$.

I.3.a. Justifier la terminaison de la boucle `while`.

I.3.b. On note p le nombre d'itérations lors de l'exécution de `mystere(n,10)`. Justifier que pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, on a $n_k\leq\frac{n}{10^k}$. En déduire, une majoration de p en fonction de n.

I.4. En s'aidant du script de la fonction `mystere`, écrire une fonction `somme_chiffres` qui prend en argument un entier naturel et renvoie la somme de ses chiffres. Par exemple, `somme_chiffres(256)` devra renvoyer 13.

I.5. Ecrire une version récursive de la fonction `somme_chiffres`, on la nommera `somme_rec`.

EXERCICE II. PROJECTION ORTHOGONALE

On considère $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $(A|B)=\text{trace}({}^tAB)$.

II.1. Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $\left(A\middle|A'\right)$?

II.2. On note $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathscr{T}$ et de son orthogonal $\mathscr{T}^\perp$.

II.3. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathscr{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathscr{T}$.

PROBLEME III. SURJECTIVITE DE L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ VERS $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On note, pour n entier $n \geq 2$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

On notera $1 \leq i, j \leq n$ pour indiquer que : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Partie préliminaire

Une norme $\|.\|$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une norme d'algèbre si elle vérifie la propriété :
pour tout couple de matrices (A,B) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

III.1. On note pour $A=(a_{i,j})$ élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{i,j}\right|$ et $\|A\| = n\|A\|_\infty$.

L'application $\|.\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que c'est une norme d'algèbre.

Dans la suite de cette partie préliminaire, on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de cette norme d'algèbre.

III.2. Justifier simplement qu'une série de vecteurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente.

III.3. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, établir que la série de réels positifs $\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|$ converge et en déduire que la série de matrices $\sum \frac{1}{k!} M^k$ converge.

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$, exponentielle de la matrice M.

Première partie

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

si T est une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, alors la matrice $\exp(T)$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}$.

III.4. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, rappeler pourquoi la matrice M est trigonalisable et déterminer une relation entre $\det(\exp(M))$ et $e^{\mathrm{tr}(M)}$.

III.5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Donner le déterminant de la matrice A. En déduire qu'il n'existe aucune matrice B à coefficients réels vérifiant $B^2 = A$ et qu'il n'existe aucune matrice M à coefficients réels vérifiant $\exp(M) = A$.

Objectifs et exemple

Ce paragraphe ne comporte aucune question, il permet de se familiariser avec les objectifs du problème.

Si A est une matrice carrée inversible à coefficients réels, nous allons démontrer dans ce problème :

- que pour tout entier naturel non nul p, il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^p = A$,
- qu'il existe une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

On se limitera dans ce sujet aux matrices carrées de taille 3.

Le problème a pour objectif de prouver l'existence de ces matrices et de les expliciter.

On commence par un exemple développé dont le candidat pourra s'inspirer notamment pour la troisième partie.

On utilise toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X-2)^2(X+3)$.

On cherche le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme χ_A de la forme aX^2+bX+c où a, b et c vont dépendre de n.

Pour cela on remplace dans la relation $X^n = \chi_A Q + aX^2+bX+c$, X par -3, puis par 2. Ensuite, on dérive cette expression et on remplace à nouveau X par 2 (Q est le quotient).

On obtient le système suivant $\begin{cases} 9a-3b+c = (-3)^n \\ 4a+2b+c = 2^n \\ 4a+b = n2^{n-1} \end{cases}$

admettant pour unique solution $\begin{cases} a = \frac{1}{25}\left((-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1}\right) \\ b = \frac{1}{25}\left(-4.(-3)^n + 4.2^n + 5n2^{n-1}\right) \\ c = \frac{1}{25}\left(4.(-3)^n + 21.2^n - 30n2^{n-1}\right) \end{cases}$.

On déduit du théorème de Cayley-Hamilton que pour tout entier naturel n,

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -(-3)^n + 6.2^n & -6.(-3)^n + 6.2^n & 6.(-3)^n - 6.2^n \\ 2.(-3)^n - 2.2^n + 5n2^{n-1} & 12.(-3)^n - 7.2^n + 5n2^{n-1} & -12.(-3)^n + 12.2^n - 5n2^{n-1} \\ (-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1} & 6.(-3)^n - 6.2^n + 5n2^{n-1} & -6.(-3)^n + 11.2^n - 5n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose alors, pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & -6.3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t \\ 2.3^t e^{i\pi t} - 2.2^t + 5t2^{t-1} & 12.3^t e^{i\pi t} - 7.2^t + 5t2^{t-1} & -12.3^t e^{i\pi t} + 12.2^t - 5t2^{t-1} \\ 3^t e^{i\pi t} - 2^t + 5t2^{t-1} & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t + 5t2^{t-1} & -6.3^t e^{i\pi t} + 11.2^t - 5t2^{t-1} \end{pmatrix}.$$

On a les résultats suivants :

- $\gamma(-1)=A^{-1}$,
- pour tout entier naturel p non nul : $\left(\gamma(\frac{1}{p})\right)^p=A$,
- $\exp(\gamma'(0))=A$.

Par exemple,

$$B=\gamma(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -i\sqrt{3}+6\sqrt{2} & -6i\sqrt{3}+6\sqrt{2} & 6i\sqrt{3}-6\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{3}-2\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & 12i\sqrt{3}-7\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & -12i\sqrt{3}+12\sqrt{2}-5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ i\sqrt{3}-\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & 6i\sqrt{3}-6\sqrt{2}+5\frac{\sqrt{2}}{4} & -6i\sqrt{3}+11\sqrt{2}-5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2=A$.

Deuxième partie

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x\longmapsto x^k\rho^x e^{i\theta x}$ où $k\in\{0,1,2\}$, $\rho\in]0,+\infty[$ et $\theta\in]0,2\pi]$.

(Rappel : pour $\rho\in]0,+\infty[$, $\rho^x=e^{x\ln\rho}$.)

III.6.

III.6.a. Déterminer un élément f de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n)=\alpha(-3)^n+\beta n^2 2^n$, si α et β sont deux constantes complexes.

III.6.b. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, expliquer pourquoi $x\longmapsto f(x+x_0)$ est encore un élément de F.

III.7.

III.7.a. Soit θ un réel. Démontrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right)$ converge vers 0.

III.7.b. Soit $k_1\in\{0,1,2\}$, $\rho_1\in]0,+\infty[$, $\theta_1\in]0,2\pi]$, $k_2\in\{0,1,2\}$, $\rho_2\in]0,+\infty[$ et $\theta_2\in]0,2\pi]$, $\theta_1\neq\theta_2$.

Démontrer que si α et β sont deux constantes complexes vérifiant, pour tout entier naturel n,

$\alpha n^{k_1}\left(\rho_1\right)^n e^{i\theta_1 n}+\beta n^{k_2}\left(\rho_2\right)^n e^{i\theta_2 n}=0$, alors $\alpha=\beta=0$.

On pourra, par exemple, supposer $\rho_1\leq\rho_2$ et commencer par examiner les cas $\rho_1<\rho_2$ et $\rho_1=\rho_2$.

III.7.c. On admet alors que si f est un élément de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n)=0$, alors f est l'application nulle.

Que peut-on dire de deux applications f et g de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n)=g(n)$?

III.8. Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Expliquer pourquoi on peut trouver 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que, pour tout entier naturel n, $A^n = \left(\omega_{i,j}(n)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$.

Discuter en fonction du nombre de racines du polynôme caractéristique de la matrice A.

On ne demande pas de résoudre des systèmes, une explication de la méthode pourra suffire.

III.9. On pose pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) = \left(\omega_{i,j}(t)\right)_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

III.9.a. Quelles sont les matrices $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$?

III.9.b. Justifier que, pour tout couple d'entiers naturels (n,m), on a la relation :

$$\gamma(n+m) = \gamma(n)\gamma(m).$$

III.9.c. Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(m)$.

Démontrer que l'on a $f = g$ et en déduire, pour tout entier naturel m, la relation $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. En déduire que, pour tout couple (x,y) de réels, $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. Démontrer que $\gamma(-1) = A^{-1}$ et que, pour tout entier naturel p non nul, $\left(\gamma(\frac{1}{p})\right)^p = A$.

III.11. Justifier que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = \left(\omega_{i,j}(t)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction γ est une solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t) \quad \text{vérifiant} \quad u(0) = I_3$$

où la fonction inconnue u vérifie, pour tout réel t, $u(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'(t) = \gamma'(0)u(t)$ vérifiant $u(0) = I_3$ et en déduire que l'on a : $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Troisième partie : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.12. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

III.13. Déterminer, par la méthode développée dans ce problème, les éléments suivants :

III.13.a. La matrice A^{-1}.

III.13.b. Une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.

III.13.c. Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Spécifier, tester, prouver : terminaison et correction
- Récursivité
- Architecture de l'ordinateur et représentation des nombres
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Topologie des espaces vectoriels normés
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp