Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2015, filière MP

Sciences industrielles

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : présentation du système
- Partie 2 : analyse de l'exigence 2.2, positionner une seringue au-dessus d'un flacon
- Partie 3 : analyse de l'exigence 3.3, mettre la bille en oscillation
- Partie 4 : analyse de l'exigence 3.4, mesurer l'amplitude des oscillations
- Partie 5 : analyse de l'exigence 2.3, prélever les produits par la tête de pipetage

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2015/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

SCIENCES INDUSTRIELLES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 22 pages dont :
- 20 pages d'énoncé,
- 2 pages de document réponse.

Toute documentation autre que celle fournie est interdite.

Automate d'exploration de l'hémostase

Partie 1 Présentation du système

1.1 Le support

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie.

L'objet de cette étude, le STA Compact (figure 1), est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.



Figure 1 - STA compact

Les figures 2 et 3 situent le STA Compact dans son environnement et précisent ses fonctions.

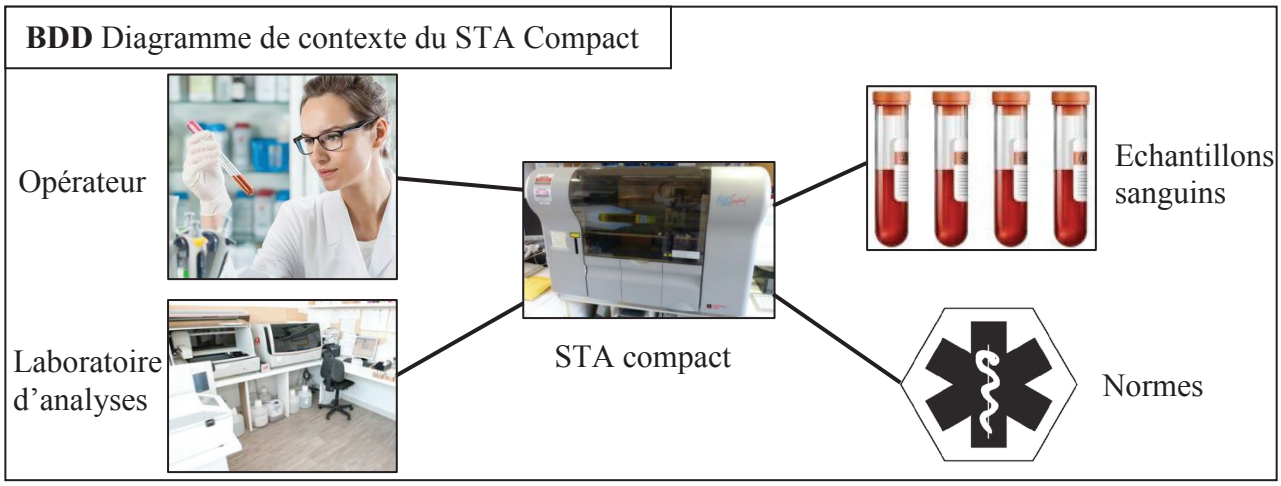


Figure 2 - Diagramme de contexte du STA Compact

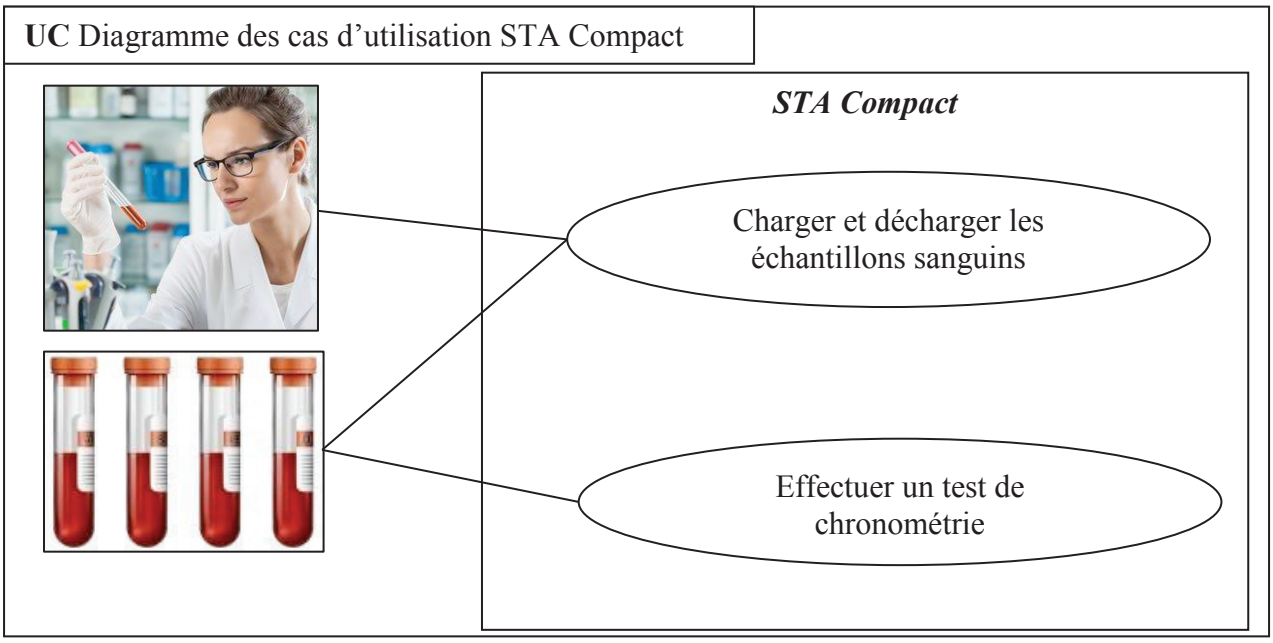


Figure 3 - Diagramme des cas d'utilisation du STA Compact

1.2 La chronométrie

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

1.2.1 Principe

Le principe du test de chronométrie est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille ;
- l'ensemble est chauffé alors que la bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique ;
- on mesure l'amplitude de l'oscillation qui diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif ;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

1.2.2 Déroulement d'un test de chronométrie (voir dessin figure 4 et les diagrammes des exigences figures 5 et 6, pages 4 et 5)

Etape 1 : préparation

Les flacons de plasma sanguin à analyser sont placés dans un tiroir, de même que les flacons de réactifs. Afin de garantir la stérilité, les flacons sont fermés par un opercule qui sera percé par l'aiguille de prélèvement.

Des cuvettes, contenant une bille, sont au préalable clipsées sur une bande, elle-même enroulée sur une bobine de stockage.

Pour chaque test, une cuvette (et sa bille) est déclipsée et placée dans la zone d'étuvage à l'aide d'un vérin (non étudié ici).

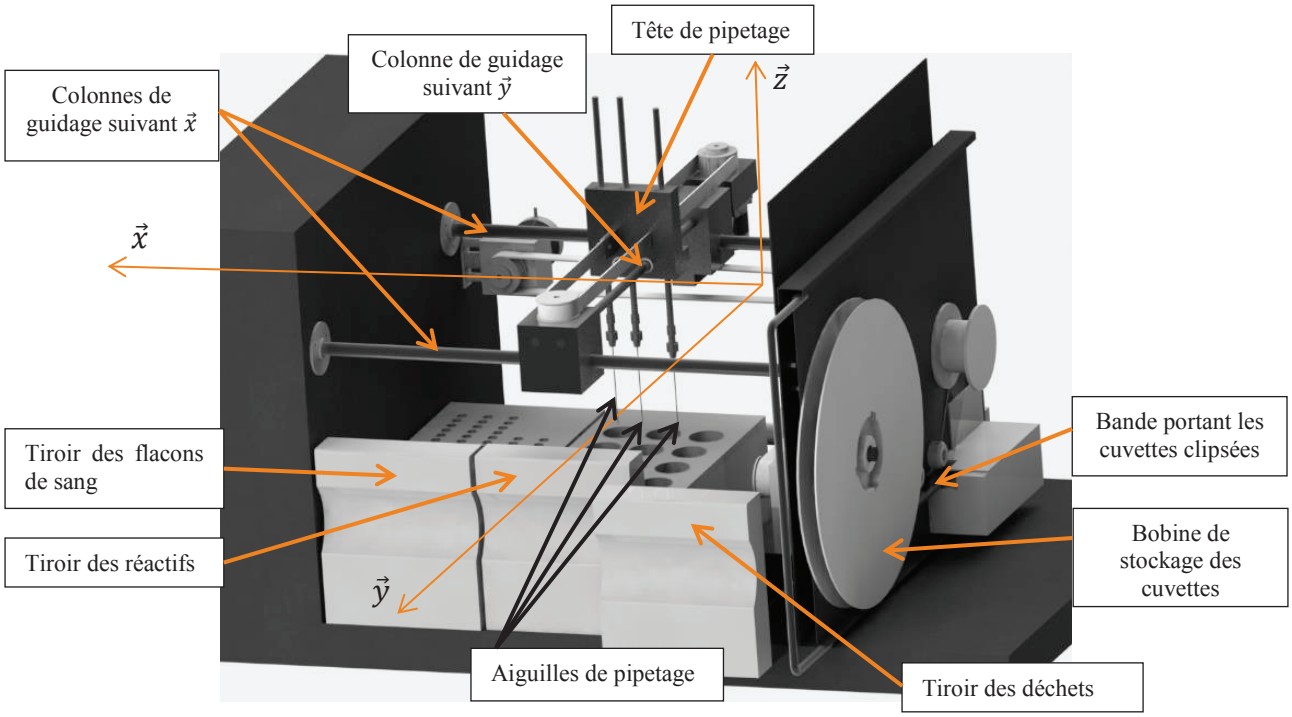


Figure 4 - Structure interne du STA Compact

Etape 2 : prélèvement des produits

Les aiguilles de prélèvement des doses de plasma et de réactifs sont reliées à la tête de pipetage. Elles peuvent avoir un mouvement de translation verticale (selon la direction $\vec{z}$) par rapport à cette tête. Deux types de réactifs sont utilisés. La tête de pipetage possède donc trois aiguilles : une pour le sang et une par type de réactif.

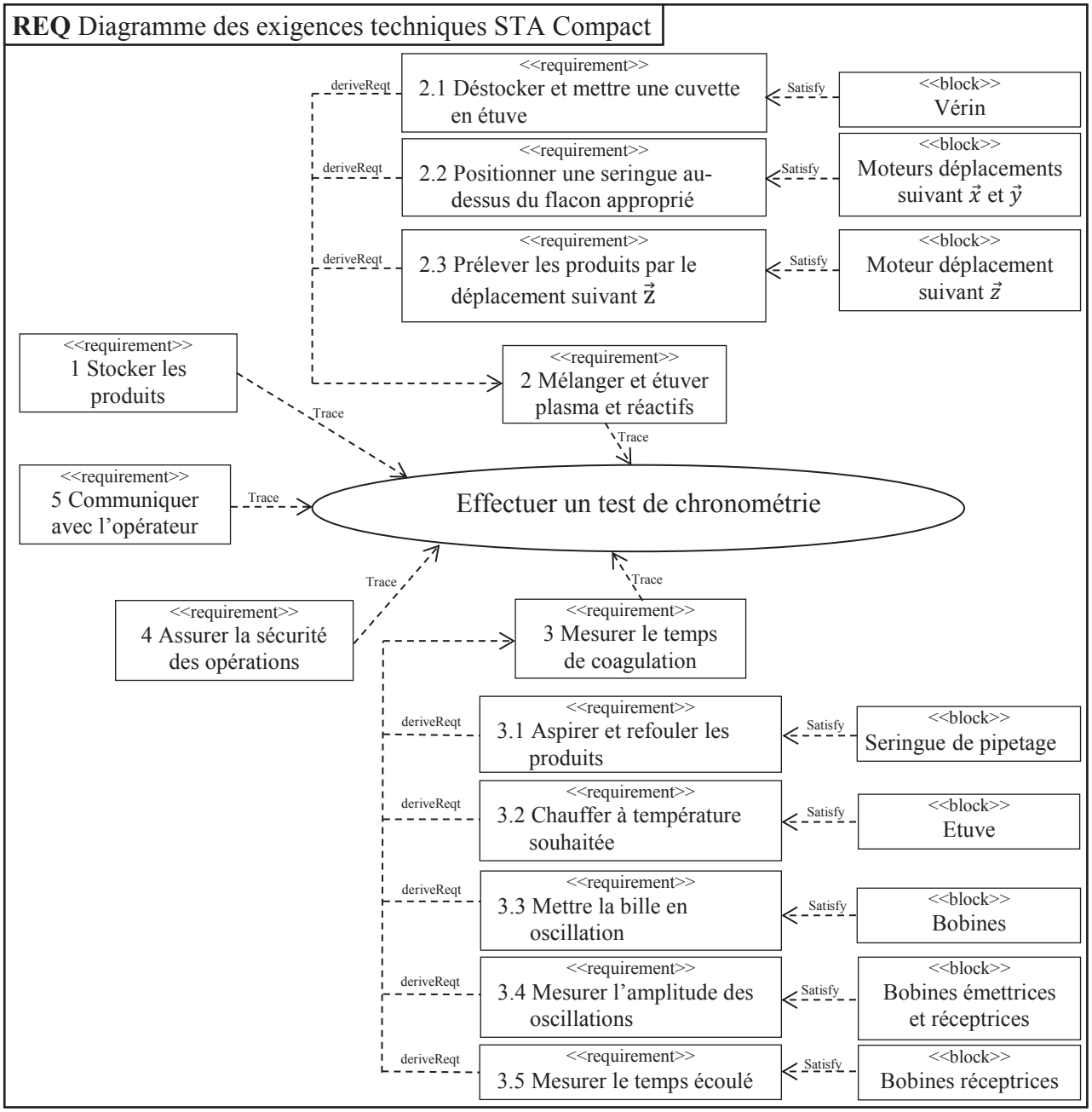


Figure 5 - Diagramme des exigences techniques avec les solutions technologiques

Successivement, pour chaque produit (plasma puis réactifs), la tête de pipetage est positionnée au-dessus du flacon approprié, l'aiguille correspondante prélève la quantité nécessaire, puis l'ensemble tête de pipetage/aiguilles vient déposer le produit dans la cuvette d'analyse. Les aiguilles sont ensuite plongées dans un flacon de nettoyage. L'aspiration et le refoulement des liquides (plasma et réactifs) se font à l'aide d'une même seringue de pipetage motorisée (non représentée).

Etape 3 : mesure

Lorsque le mélange est réalisé dans la cuvette, celle-ci est placée dans la zone de mesure. Deux bobines motrices provoquent l'oscillation de la bille. Deux autres bobines, l'une émettrice et l'autre réceptrice, effectuent la mesure des amplitudes d'oscillation.

Le test terminé, la cuvette est placée dans un tiroir à déchets.

Le système est connecté à un poste informatique permettant les échanges d'ordres et de comptes-rendus avec le manipulateur.

Le diagramme de la figure 5 (page 4) présente un extrait du diagramme des exigences techniques assorti des éléments qui permettent de satisfaire ces exigences.
La figure 6 présente un extrait du diagramme des exigences, se limitant à celles pour lesquelles nous allons étudier certains critères.

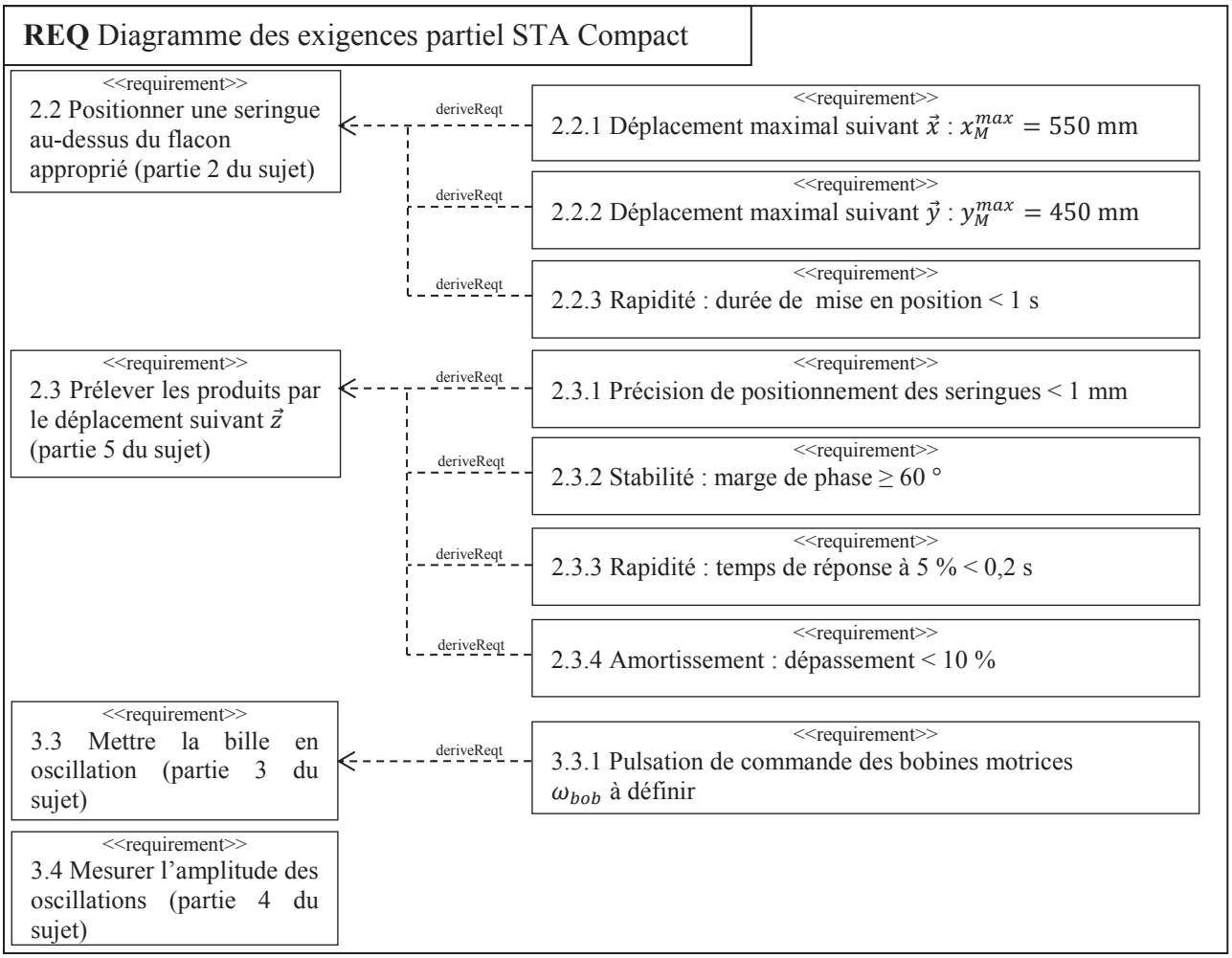


Figure 6 - Diagramme partiel des exigences

L'étude comporte 4 parties :

- la partie 2 analyse les solutions techniques mises en place pour satisfaire à l'exigence 2.2 « Positionner une seringue au-dessus du flacon approprié » et plus particulièrement à la loi de commande des moteurs ;
- les parties 3 et 4 analysent les solutions techniques et informatiques pour satisfaire à l'exigence 3 « Mesurer le temps de coagulation » ;
- la partie 5 analyse la capacité du système à satisfaire à l'exigence 2.3 « Prélever les produits » et plus particulièrement l'exigence relative à la précision du volume prélevé.

Partie 2 Analyse de l'exigence 2.2 « Positionner une seringue au-dessus d'un flacon »

Objectif : déterminer la loi de commande en vitesse optimale des axes de translation $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

2.1 Mise en situation

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 8 (page 6), est guidée en translation suivant $\vec{y}$ par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant $\vec{x}$ par rapport au bâti (figure 7, page 6).

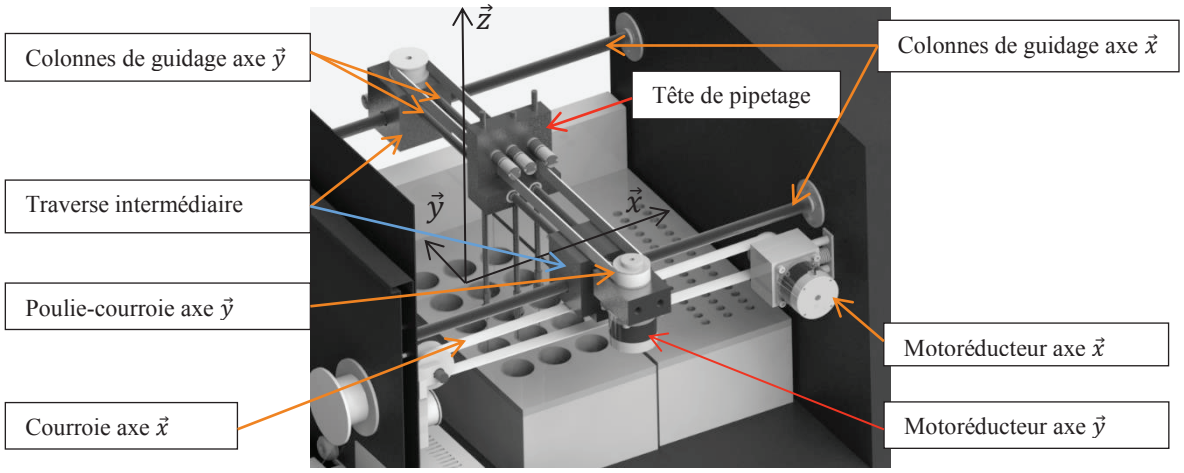


Figure 7 - Système de guidage suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$

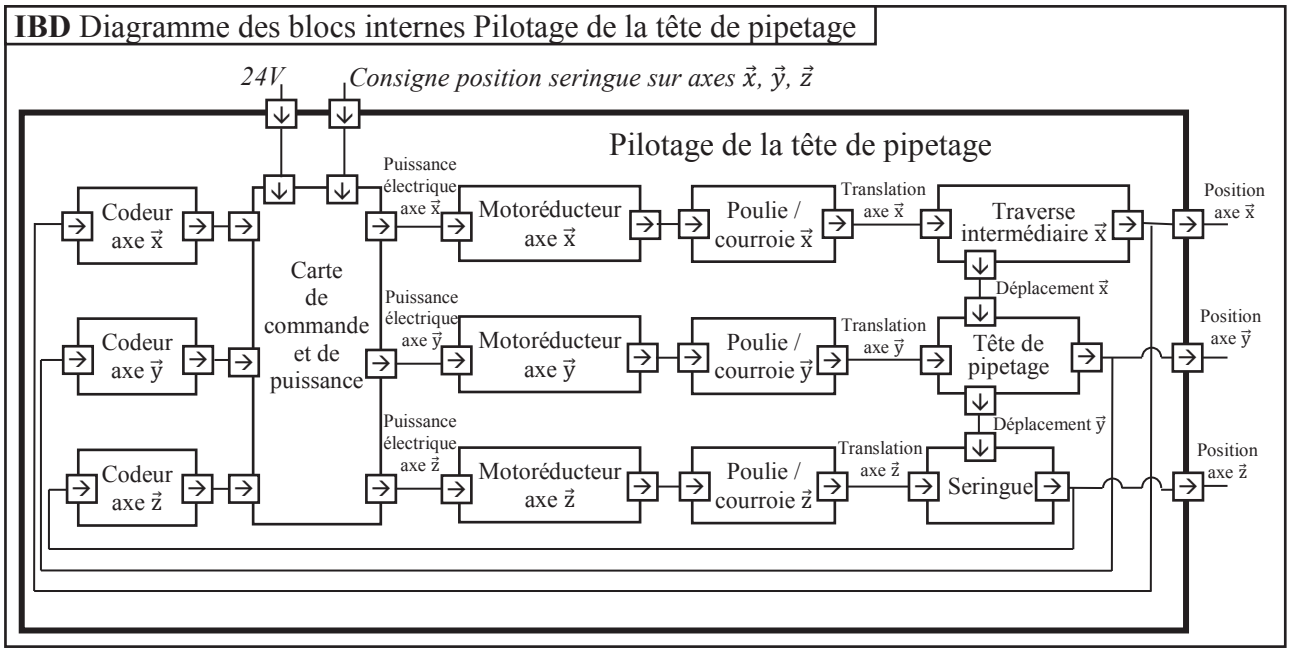


Figure 8 - Diagramme de bloc interne de la tête de pipetage

A la mise en service de l'appareil, la tête de pipetage est placée à une position de référence.
Après chaque déplacement, la tête revient à cette position de référence qui permet le nettoyage des aiguilles.
On se propose d'étudier le protocole de déplacement de cette tête pour atteindre une position définie par un point M de coordonnées $(x_M, y_M, 0)$ par rapport à la position de référence.
Chaque axe est mis en mouvement par un motoréducteur et un système poulie-courroie.
Les vitesses de translation maximum sur chaque axe (V_{max}^x et V_{max}^y) sont obtenues pour les vitesses de rotation maximum des moteurs. Les chaînes cinématiques sont identiques : nous avons donc $V_{max}^x = V_{max}^y = V_{max}$.
Soient V_M^x et V_M^y (V_M^x et $V_M^y \leq V_{max}$) les vitesses maximum suivant chaque axe lors du déplacement pour atteindre le point M de coordonnées $(x_M, y_M, 0)$.

2.2 Optimisation de la commande

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe $\vec{x}$ qui est le plus grand. On note V^x la vitesse de la tête de pipetage selon cet axe.
On rappelle que la distance maximum à parcourir est $x_M^{max} = 550$ mm en 1 seconde.

La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (figure 9) avec les temps d'accélération et de décélération (T_a) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps. T est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

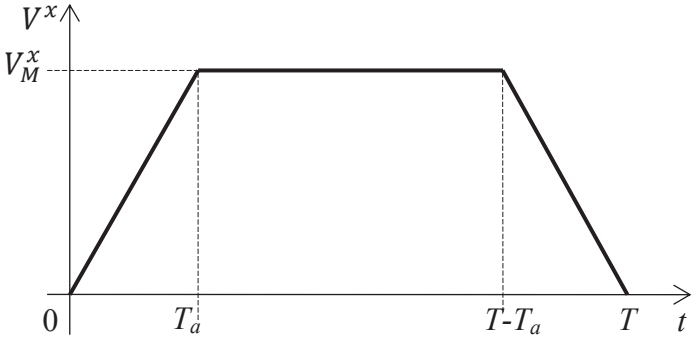


Figure 9 - Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :
- le mouvement de rotation du moteur (vitesse ω_m^x) est transformé en mouvement de translation (vitesse V^x) ;
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est $\lambda = \frac{V^x}{\omega_m^x}$;
- la distance à parcourir est x_M^{max} ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est J_e ;
- pour cette question, les frottements et la pesanteur sont négligés, il n'y a donc pas de couple résistant.

Question 1. Exprimer la vitesse maximale V_M^x en fonction de x_M^{max}, T et T_a.

Question 2.
- Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur C_m en fonction de V^x, T_a, J_e et λ durant les trois phases du mouvement.
- Préciser à quel(s) instant(s) t la puissance fournie par le moteur est maximale (P_{max}).
- Exprimer cette puissance P_{max} en fonction de V_M^x, λ, J_e et T_a.
- Donner alors l'expression de P_{max} en fonction de x_M^{max}, λ, J_e, T et T_a.

Question 3. A partir de cette expression, montrer que P_{max} est minimale pour un réglage du temps d'accélération T_a tel que $T_a = \frac{T}{3}$.

Pour cette nouvelle commande avec $T_a = \frac{T}{3}$, on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant $\vec{x}$.
Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :
- vitesse maximale du moteur : $N_{max}^{mot} = 4\,150$ tr · min^{-1} ;
- rapport de réduction du réducteur $k = 1/10$;
- rayon de poulie $R_p = 20$ mm.

Question 4. Déterminer la vitesse de rotation maximum ω_{max}^x que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

Partie 3 Analyse de l'exigence 3.3 « Mettre la bille en oscillation »

Objectif : déterminer la pulsation optimale des bobines motrices.

3.1 Mise en situation

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (figures 10 et 11).
La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure.
L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice.
Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie.

Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

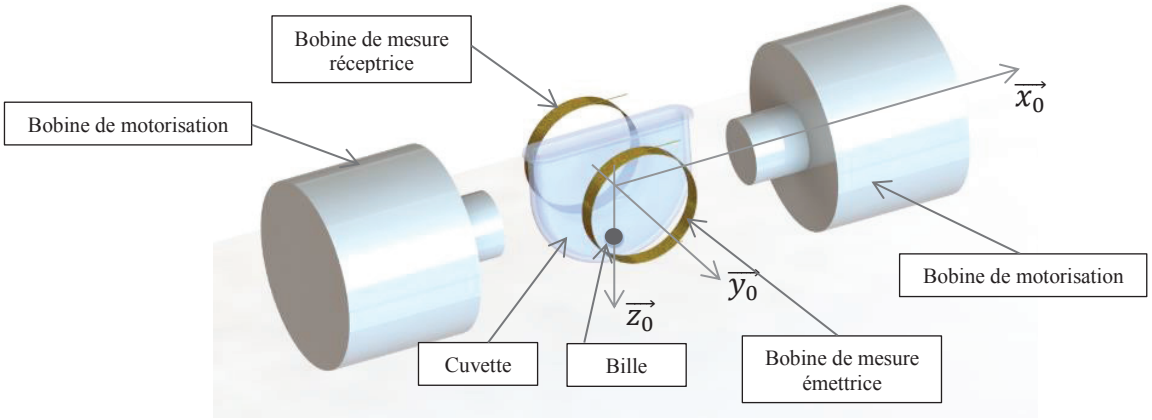


Figure 10 - Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

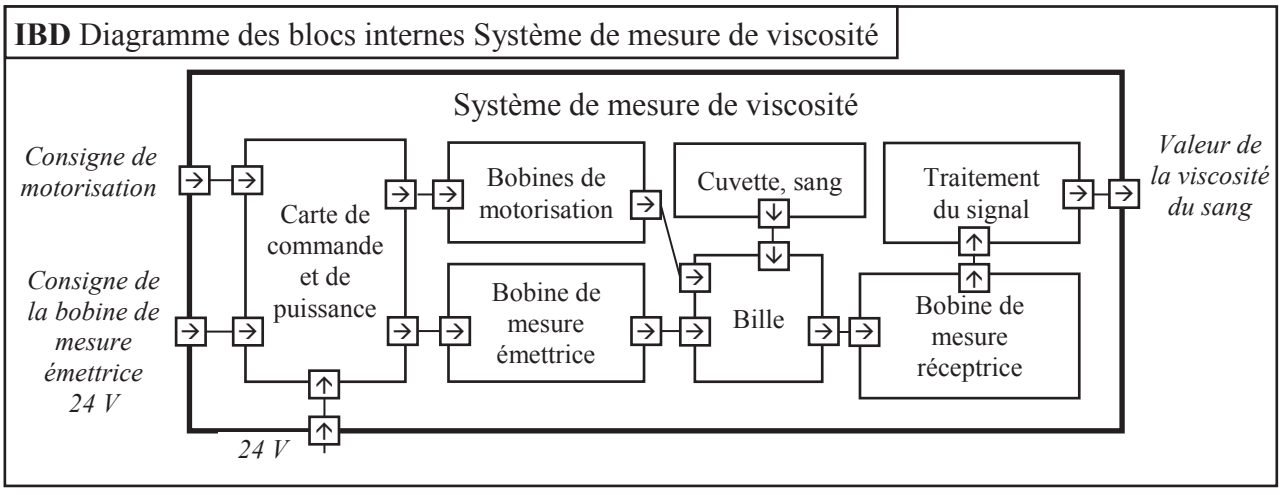


Figure 11 - Diagramme de bloc interne du système de mesure

Dans un premier temps, on se propose de modéliser le comportement de la bille pour en déduire le réglage de la commande des bobines motrices (partie 3.3, page 9).
Dans un second temps, un algorithme détermine le temps de coagulation à partir de l'amplitude des oscillations. Celui-ci sera défini paragraphe 4.1, page 14 (partie informatique).

3.2 Hypothèses de calculs

Le schéma de calcul est donné figure 12.
Hypothèses :

- la bille de masse m, de centre de masse G, de rayon r, roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{z_0})$. Cette hypothèse de roulement sans glissement sera vérifiée paragraphe 3.4, page 12 (partie informatique) ;
- I est le point de contact entre la bille et le rail circulaire ;
- la position de la bille sur le rail est repérée par : $\theta = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1}) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$.

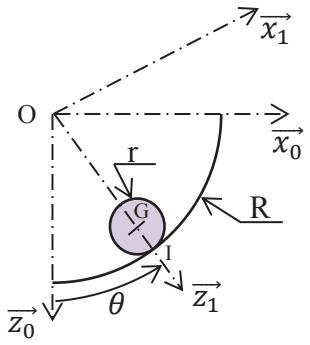


Figure 12 - Bille en contact avec le rail de la cuvette

On note :

- $\{T(rail \rightarrow bille)\} = \left\{\begin{matrix} -N_I\overrightarrow{z_1} + T_I\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_I$, le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille ;
- f le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette : $f = 0{,}1$;
- $\{T(bob \rightarrow bille)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}(bob \rightarrow bille) = F(t)\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$, le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec $F(t) = F_0 \sin(\omega_{bob} t)$;
- $\{T(fluide \rightarrow bille)\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F_v}(fluide \rightarrow bille) = -f_v\, \vec{V}(G \in \text{bille}/0) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$, le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors $f_v = 6\pi.r.\eta$ où η est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation ;
- $\{T(g \rightarrow bille)\} = \left\{\begin{matrix} m \cdot g\, \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$, le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille ;
- $\{V(\text{bille}/0)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(\text{bille}/0) = \omega_b\overrightarrow{y_0} \\ \vec{V}(G \in \text{bille}/0) = v\overrightarrow{x_1} \end{matrix}\right\}_G$, le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0 ;
- $J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$, le moment d'inertie de la bille autour de l'axe $(G, \overrightarrow{y_0})$;
- $R = \|\overrightarrow{OI}\|$, le rayon du rail, $r = \|\overrightarrow{GI}\|$, le rayon de la bille.

On notera $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ où p représente la variable de Laplace.

3.3 Analyse

Question 5. En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v, les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de $\dot{\theta}$, r et R.

Question 6. En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés :

- Montrer que les efforts normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille sont liés à l'angle θ par les équations suivantes :

$$N_I = F(t)\sin\theta + mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta} \quad (2)$$

- Justifier l'équation du mouvement de la bille :

$$\frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\sin\theta = F(t)\cos\theta \qquad (3)$$

Question 7. θ étant petit, linéariser l'équation du mouvement puis en déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)}$. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_s, de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v, R, r, m et g.

Question 8. On prendra les valeurs numériques suivantes pour cette question : $\omega_0 = 21{,}8\ \text{rad}\cdot s^{-1}$; $K_s = 25\ \text{N}^{-1}$; $\xi = 4 \cdot f_v$.
Tracer, sur le document réponse, le diagramme asymptotique de Bode en gain, ainsi que l'allure du diagramme réel pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux f_v :
$f_v = 0{,}005$; $f_v = 0{,}05$; $f_v = 0{,}2$.

Question 9. La sollicitation des bobines est sinusoïdale : $F(t) = F_0 \sin(\omega_{bob} t)$. Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation ω_{bob} pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement f_v.

Question 10.

- Exprimer, pour un système du second ordre, en fonction de ξ, le rapport des amplitudes de sortie à $\omega \to 0\ et\ \omega = \omega_0$ pour une même amplitude du signal d'entrée.
- Les figures 13 a, b, c, d (pages 10 et 11) représentent, avec f_v constant, l'évolution de la position de la bille θ [°] en fonction du temps t [s] pour différentes valeurs de pulsation ω_{bob}. A partir de ces courbes et des résultats précédents, déterminer la valeur du coefficient d'amortissement ξ.
- En déduire la valeur numérique du coefficient de viscosité η du sang correspondant.
- A partir de ces analyses, en justifiant votre réponse, donner l'allure de la courbe θ en fonction de t obtenue à la pulsation ω_0 lorsque la viscosité du sang varie au fur et à mesure de la coagulation (si l'on suppose que f_v augmente avec la coagulation).

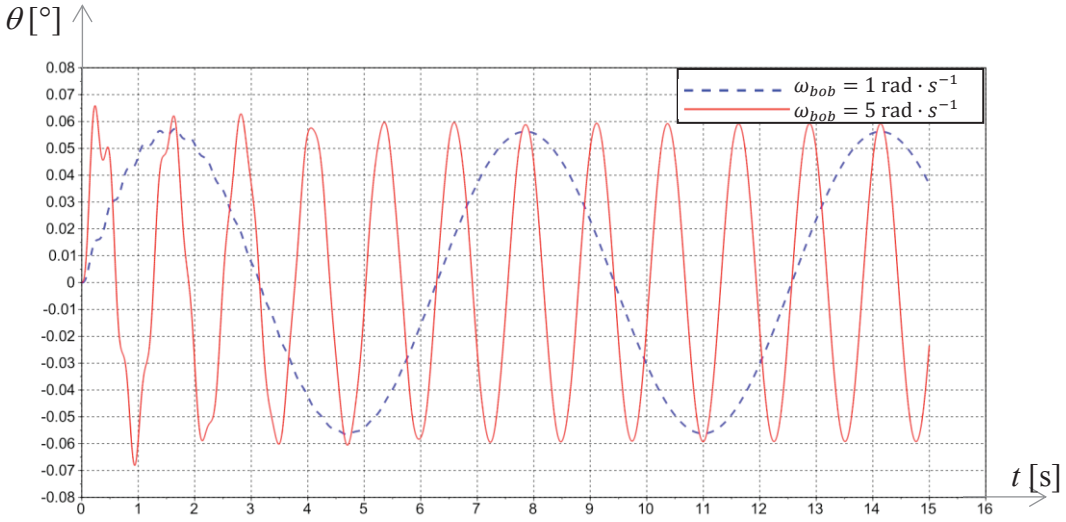


Figure 13 a - θ[°] en fonction de t [s] pour $\omega_{bob} = 1$ et 5 rad · s^{-1}

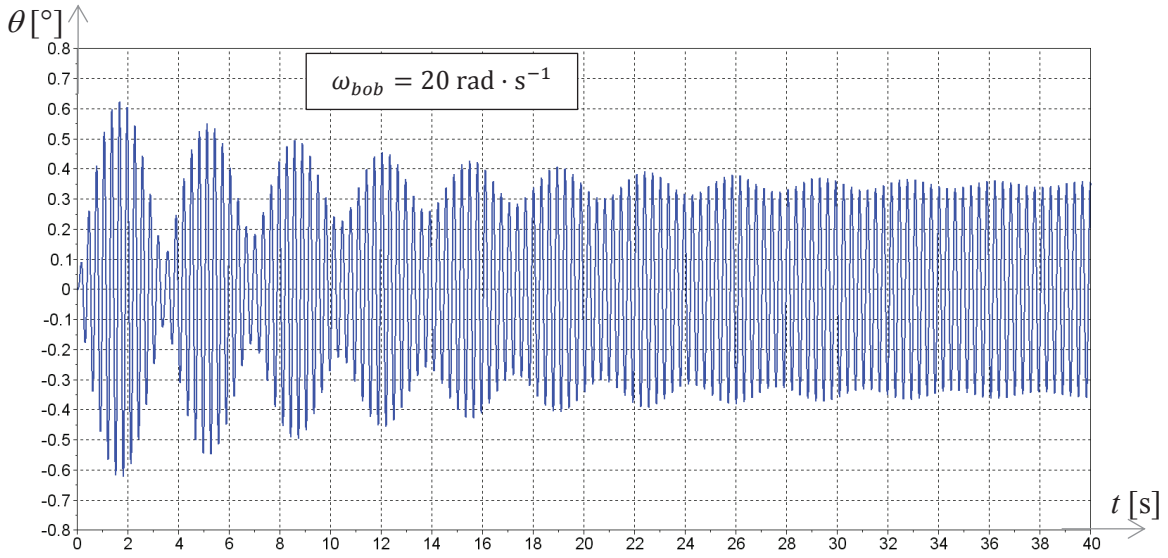


Figure 13 b - θ [°] en fonction de t [s] pour $\omega_{bob} = 20$ rad · s^{-1}

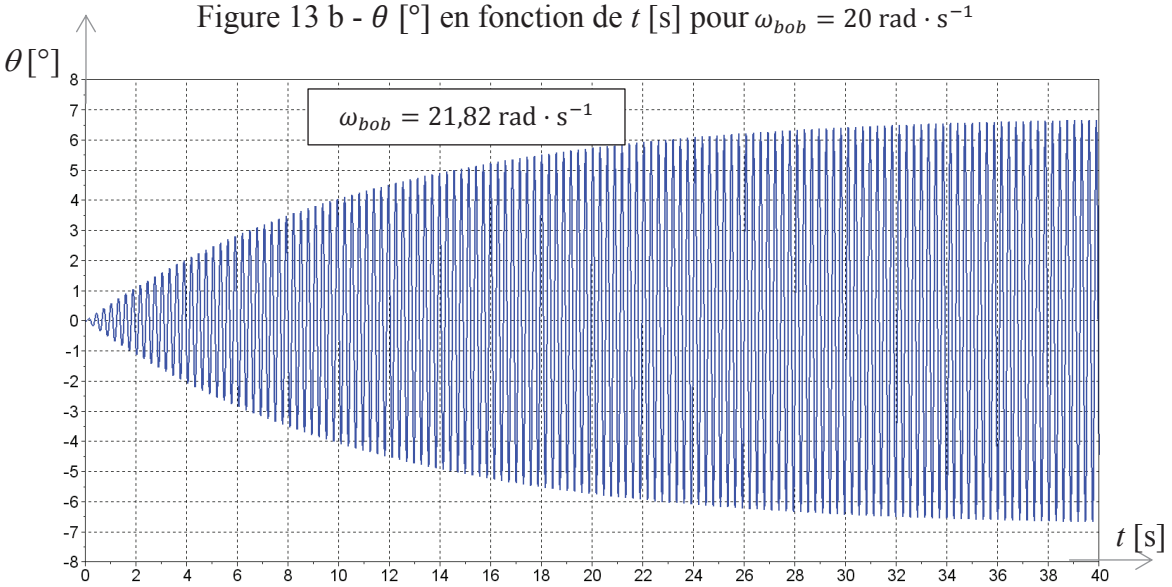


Figure 13 c - θ[°] en fonction de t [s] pour $\omega_{bob} = 21{,}82$ rad · s^{-1}

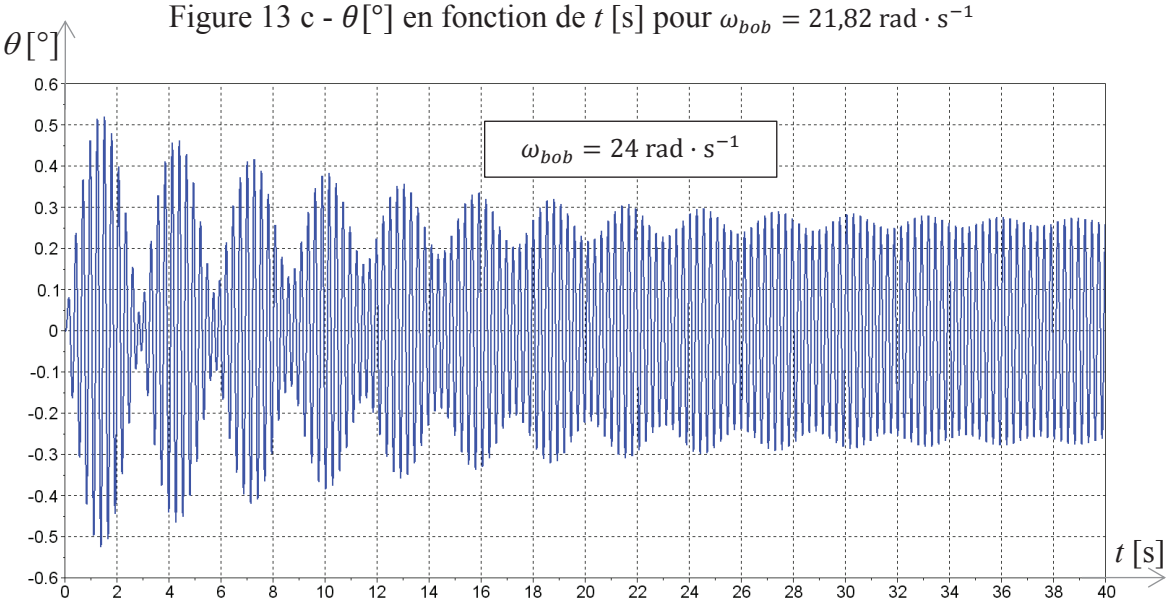


Figure 13 d - θ[°] en fonction de t [s] pour $\omega_{bob} = 24$ rad · s^{-1}

3.4 Validation des hypothèses (partie informatique)

Objectif : on se propose de vérifier la validation de l'hypothèse de linéarisation faite Question 7 (page 10), ainsi que l'hypothèse de roulement sans glissement faite Question 5 (page 9).

Ce paragraphe fait plus spécifiquement appel aux compétences acquises dans le cadre du programme d'informatique. Le candidat est libre de choisir entre les langages Python et Scilab pour l'écriture des fonctions demandées.
On désigne par tableaux les éléments qui pourraient être de type list ou ndarray sous Python ou matrice sous Scilab.

Cette étude se fera en 3 temps :
- résolution de l'équation différentielle non linéaire ;
- validation de la linéarisation ;
- validation de l'hypothèse de roulement sans glissement.

L'étude dynamique a permis de déterminer :
- les équations liant N_I et T_I en fonction de θ et de ses dérivées :

$$N_I = F_0 \sin(\omega_{bob} t) \sin\theta + mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta} \text{ ;} \quad (2)$$

- l'équation différentielle non linéaire régissant la position de la bille :

$$\frac{7}{5} m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\sin\theta = F_0 \sin(\omega_{bob} t)\cos\theta \quad (3)$$

avec : $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$.

En posant Y tel que $Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$, l'équation différentielle (3) peut se mettre sous la forme du problème de Cauchy : $\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$ avec

$$F\big(t, Y(t)\big) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \frac{5}{7m(R-r)} \left(F_0 \sin(\omega_{bob} t)\cos\theta(t) - f_v(R-r)\dot{\theta}(t) - mg\sin\theta(t)\right) \end{pmatrix}$$

et $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{pmatrix}$.

La réponse $\theta(t)$ recherchée sur l'intervalle $[0, T_{maxi}]$ sera obtenue par la méthode d'Euler explicite.
Le pas de calcul, noté h, sera choisi constant.
L'intervalle de temps discrétisé est alors représenté par le tableau :
$T = [t_0 = 0, t_1, \ldots, t_{N-1} = T_{maxi}]$.
Pour chaque instant t_i, une valeur approchée Y_i de la solution $Y(t_i)$ de l'équation différentielle est recherchée. L'ensemble des Y_i et des temps t_i représente N vecteurs de dimensions 3, qui seront stockés en mémoire sous la forme :

- soit d'un tableau : $SY = \begin{bmatrix} 0 & \theta(0) & \dot{\theta}(0) \\ t_1 & \theta(t_1) & \dot{\theta}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{maxi} & \theta(T_{maxi}) & \dot{\theta}(T_{maxi}) \end{bmatrix}$;
- soit d'une liste de listes :

$SY = \Big[\big[0, \theta(0), \dot{\theta}(0)\big], \big[t_1, \theta(t_1), \dot{\theta}(t_1)\big], \ldots, \big[T_{maxi}, \theta(T_{maxi}), \dot{\theta}(T_{maxi})\big]\Big]$.

Les grandeurs physiques m, R, r, f_v, g, F_0 et ω_{bob} sont appelées m, R, r, fv, g, F0, wbob et ont été initialisées en début de programme.

Question 11. Donner la relation de récurrence qui lie Y_{i+1} à Y_i , $F(t_i, Y_i)$ et le pas de calcul h.

Question 12. Ecrire une fonction **fi**(t_i, Y_i), qui prend pour arguments t_i la valeur du temps discrétisé et Y_i la valeur du vecteur Y au temps discrétisé t_i et qui retourne la valeur de $F\big(t_i, Y(t_i)\big)$.

Question 13. Ecrire une fonction **Euler** (Y_{ini}, h, T_{maxi}, F) qui prend en paramètres Y_{ini} un tableau à 2 dimensions (ou une liste de listes) contenant la condition initiale Y_0, h le pas de calcul, T_{maxi} le temps final de calcul et F la fonction du problème de Cauchy. Cette fonction renverra le tableau SY. L'appel à cette fonction dans le programme se fera par la commande $SY =$ **Euler**(Y_0, h, T_{maxi}, fi).

Question 14. Donner la complexité de la fonction **Euler** pour T_{maxi} fixée. En déduire comment évolue le temps de calcul quand le pas h est divisé par 10.

Afin de vérifier l'hypothèse du roulement sans glissement de la bille sur le rail, on doit vérifier qu'en chaque instant t_i on a $\left|\frac{T_I}{N_I}\right|_i \leq f$ ($f = 0{,}1$ coefficient d'adhérence de la bille sur le rail).

N_I et T_I sont définis par les équations (1) et (2).

Question 15. Ecrire une fonction **VerifRSG**(SY, f) qui prend pour argument le tableau SY et f (coefficient d'adhérence de la bille sur le rail) et qui renvoie **True** si le critère d'adhérence est vérifié (c'est-à-dire si $\left|\frac{T_I}{N_I}\right| \leq f, \forall t_i$), **False** sinon.

Les figures 14 et 15 ci-dessous sont issues de la résolution numérique.

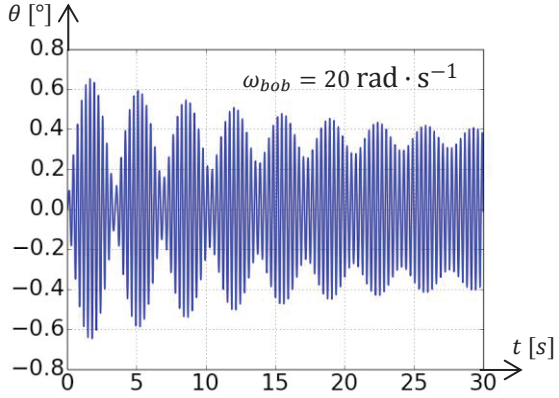


Figure 14 a

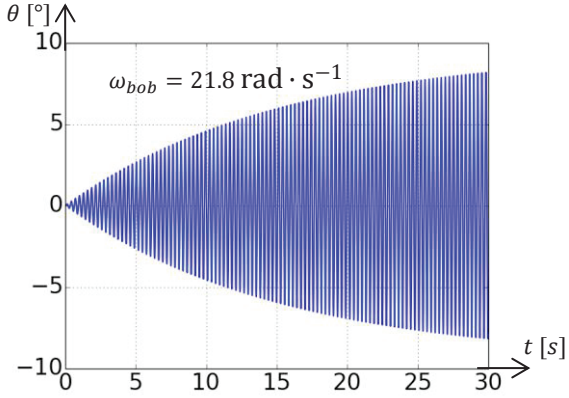


Figure 14 b

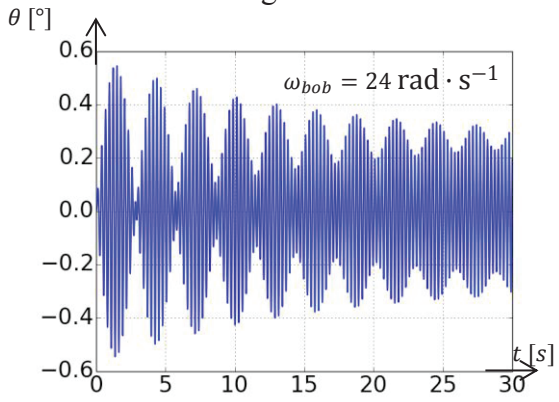


Figure 14 c

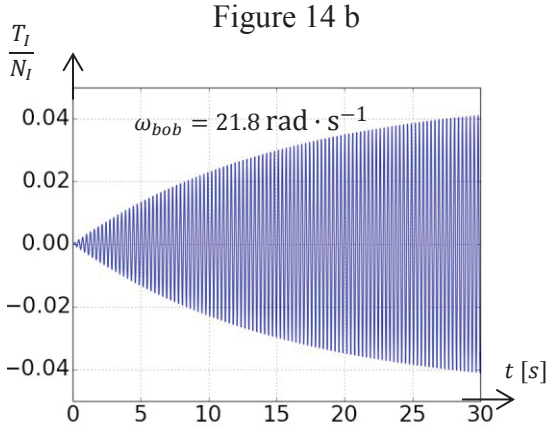


Figure 15

Figures 14 a, b, c - θ[°] en fonction de t [s] pour différentes valeurs de ω_{bob}

Figure 15 - T_I/N_I en fonction de t [s]

Question 16. A partir de ces résultats, conclure quant aux hypothèses précédentes (validation de la linéarisation, hypothèse de roulement sans glissement).

Partie 4 Analyse de l'exigence 3.4 « Mesurer l'amplitude des oscillations » (partie informatique)

Objectif : écrire un algorithme permettant de mesurer le temps de coagulation à partir des mesures réalisées par les deux bobines émettrice et réceptrice.

Cette partie fait plus spécifiquement appel aux compétences acquises dans le cadre du programme d'informatique. Le candidat est libre de choisir entre les langages Python et Scilab pour l'écriture des fonctions demandées.
Dans la suite, on désigne par tableaux les éléments qui pourront être définis de type list ou ndarray sous Python ou matrice sous Scilab (au choix du candidat).

L'étude se fait en deux temps :
- calcul du temps de coagulation à partir des valeurs stockées dans un tableau de mesures ;
- étude de la gestion du tableau de mesures.

4.1 Calcul du temps de coagulation

Afin de mesurer le temps de coagulation, les signaux issus des bobines sont amplifiés, filtrés, échantillonnés puis stockés dans un tableau nommé *M*. La période d'échantillonnage est notée *Te*.

On considèrera que la mesure s'effectue sur une durée fixe : la taille de *M* est fixe et égale à N_{maxi}.

Le temps de coagulation se détermine à partir de la valeur efficace du signal sur une durée donnée.

La **valeur efficace** (appelée aussi Root Mean Square, ou moyenne quadratique) est définie par : $X_{eff}(i) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=i}^{N-1+i} {x_k}^2}$ où $\{x_k\}$ sont les valeurs des *N* mesures successives considérées. Elle est donc l'image de l'amplitude des oscillations à l'instant considéré.

Question 17. Ecrire la fonction **Valeur_efficace**(*T, a, b*), qui prend pour argument un tableau *T*, les entiers *a* et *b* et renvoie la valeur efficace des *b* éléments consécutifs du tableau à partir de l'indice *a*. On supposera pour cette question que *a* et *b* sont tels qu'il n'y a pas de débordement d'indice possible. Donner la complexité de la fonction **Valeur_efficace**.

Dans la suite, on supposera $N \ll N_{maxi}$.

Le **temps de coagulation** est défini comme le temps au bout duquel la valeur efficace des signaux a atteint 70 % de la valeur efficace initiale.

Si cette valeur n'est pas atteinte sur la totalité du tableau M, on considèrera que la mesure a échoué.

L'algorithme de calcul est le suivant :

Données : *M*, *Te*, *N* : le tableau de mesures, la période d'échantillonnage (en millisecondes), le nombre de mesures à considérer.
Résultat : *Tc* le temps de coagulation (en secondes).

```
1    Temps_coagulation(M, Te, N)
2        N_maxi ←taille(M)
3        X_eff_0 ←Valeur_efficace(M, 0, N)
4        i ← 0
5        X_eff ← X_eff_0
6        Tant que X_eff > 0,7 · X_eff_0 et que i < N_maxi − N faire
7            X_eff ←Valeur_efficace(M, i, N)
```

8 $i \leftarrow i + 1$
9 **Fin Tant que**
10 **Si** $i = N_{maxi} - N$
11 **Retourner** « la mesure a échoué »
12 **Sinon**
13 $Tc \leftarrow i \cdot Te/1000$
14 **Retourner** *Tc*

Question 18.

- Quelle est la complexité de la fonction **Temps_coagulation**(*M, Te, N*) ?
- On propose de modifier la ligne 7 de la façon suivante :

7' $X_{eff} \leftarrow \sqrt{X_{eff} \cdot X_{eff} + M[i+N] \cdot M[i+N] - M[i] \cdot M[i]}$

Comparer les deux solutions en terme de temps d'exécution. Justifier.

4.2 Gestion du tableau de mesures

Afin d'optimiser la durée de l'analyse, le calcul de la valeur efficace des oscillations s'effectue en temps réel.
On admet l'existence d'une fonction **Mesure**, de paramètre Te (période d'échantillonnage), qui fait l'acquisition d'une valeur issue des bobines après amplification et filtrage. Celle-ci renvoie la valeur de la mesure au prochain instant $k \times Te,\ k \in \mathbb{N}$. Il n'est pas demandé d'écrire cette fonction et elle pourra être directement appelée par la commande **Mesure**(Te). On peut considérer que la durée du calcul du temps de coagulation est négligeable devant Te.

Les mesures sont stockées dans une zone mémoire appelée tampon, de la façon suivante :

- les N premières mesures sont mémorisées dans le tampon ;
- à partir de la $(N+1)^{ième}$ mesure, chaque nouvelle mesure est stockée en mémoire, alors que la plus ancienne est déstockée.

Question 19. Pourquoi ne peut-on pas utiliser de structure de type pile pour gérer le tampon ?

On utilise une structure de type file pour gérer le tampon. Les fonctions relatives aux files sont voisines des fonctions relatives aux piles. Un tableau présentant ces deux structures est donné ci-dessous.

Piles	Files
creer_pile( ) : renvoie une pile vide	creer_file( ) : renvoie une file vide
empiler(*p, a*) : ajoute un élément *a* en tête de la pile *p*	enfiler(*f, a*) : ajoute un élément *a* en queue de la file *f*
depiler(*p*) : renvoie et supprime l'élément en tête de la pile *p*	defiler(*f*) : renvoie et supprime l'élément en tête de la file *f*

Toutes ces opérations s'effectuent en temps constant.

Question 20. Ecrire, en n'utilisant que la fonction **Mesure**(Te) et les fonctions spécifiques aux files, la fonction **Init_tampon**(*N, Te*) qui crée une file d'attente *T*, réalise *N* mesures successives à la période *Te* et stocke celles-ci dans *T*. Elle renvoie *T*.

L'algorithme de détermination du temps de coagulation est modifié de la façon suivante :

Données : *M, Te,* N_{maxi} : le tableau de mesures, la période d'échantillonnage (en millisecondes), le nombre maximal de mesures réalisées
Résultat : *Tc* le temps de coagulation (en secondes)

```
1     Temps_coagulation(M, Te, N_maxi)
2         T ←Init_tampon(N, Te)
3         X_eff_0 ←Valeur_efficace(T)
4         i ← 0
5         X_eff ← X_eff_0
6         Tant que X_eff > 0,7 · X_eff_0 et que i < N_maxi − N faire
7             ----  à compléter  ---


11            i ← i + 1
12        Fin Tant que
13        Si i = N_maxi − N
14            Retourner « la mesure a échoué »
15        Sinon
16            Tc← i · Te/1000
17        Retourner Tc
```

Question 21. En n'utilisant que la fonction **Mesure**(Te) et les fonctions spécifiques aux files, compléter, sur votre copie, les lignes 7 et suivantes de l'algorithme de mesure modifié.

Partie 5 Analyse de l'exigence 2.3 « Prélever les produits par le déplacement suivant $\vec{z}$ de la tête de pipetage »

Objectif : régler la commande du moteur afin de respecter le cahier des charges.

5.1 Modélisation de la motorisation

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe $\vec{z}$) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crémaillère.
On note :

- $\theta_m(t)$ et $\omega_m(t)$ l'angle et la vitesse angulaire du moteur ;
- $\omega_r(t)$ la vitesse angulaire en sortie de réducteur ;
- $k_r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{19{,}2}$ le rapport de réduction du réducteur ;
- $c_m(t)$ le couple moteur ;
- J_m l'inertie du moteur et J_r l'inertie du réducteur ramenée à l'arbre moteur ;
- m_p = 0,2 kg la masse en translation ;
- $F_r(t) = 1$ N l'effort de l'opercule sur l'aiguille ;
- c_{res} le couple résistant ramené à l'arbre moteur modélisant l'ensemble des frottements, y compris les frottements internes au réducteur ($c_{res} \leq 0$) ;
- $R_p = 10$ mm le rayon du pignon du système pignon crémaillère ;
- $\omega_{mn} = 4\,150$ tr · min^{-1} la vitesse de rotation nominale du moteur ;
- $c_{mn} = 5 \cdot 10^{-3}$ N · m le couple moteur nominal ;
- $E_c(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})$ l'énergie cinétique de l'ensemble S par rapport au référentiel $\mathrm{R_g}$.

Question 22. Déterminer l'expression de l'inertie équivalente J_{eq}, ramenée à l'arbre moteur, de S, l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathrm{R_g}$, définie par : $E_c(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \frac{1}{2} J_{eq} \cdot {\omega_m}^2$.

Dorénavant on se place dans la situation la plus défavorable, à savoir le sens de la remontée de l'aiguille. La pesanteur est prise en compte.

Question 23.

- A partir d'un théorème d'énergie-puissance, écrire l'équation du mouvement liant $c_m(t)$ et les efforts extérieurs.
- Mettre celle-ci sous la forme : $c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$. (4)
- Donner l'expression de $c_r(t)$ en fonction de $c_{res}, F_r(t), m_p, g, R_p$ et k_r.

La tête de pipetage est asservie en position. Le schéma-bloc de cet asservissement est ébauché sur le document réponse (Question 24). Un codeur mesure l'angle de rotation moteur et un hacheur module la tension aux bornes du moteur.
On note :

- $u(t)$ la tension aux bornes du moteur, $i(t)$ l'intensité, $e(t)$ la force électromotrice ;
- R la résistance de l'induit, L son inductance, K la constante de force électromotrice ;
- $K_{cod} = 2\,000$ points/tr le gain du codeur tel que $m_\theta(t) = K_{cod} \cdot \theta_m(t)$;
- K_{adap} le gain permettant d'adapter la consigne $z_c(t)$ à l'image de la position $m_\theta(t)$;
- $H_{cor}(p)$ la fonction de transfert du correcteur ;
- $K_h = 0{,}094\ \text{V} \cdot \text{point}^{-1}$ le gain du hacheur.

Les équations du moteur à courant continu sont les suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)\ ; \quad (5)$$
$$e(t) = K \cdot \omega_m(t)\ ; \quad (6)$$
$$c_m(t) = K \cdot i(t). \quad (7)$$

Question 24. En tenant compte des notations précédentes, compléter sous forme littérale, sur le document réponse, le schéma-bloc de l'asservissement en position.

Question 25. Déterminer l'expression de K_{adap} pour que l'écart calculé $\varepsilon(t)$ soit proportionnel à l'erreur $z_c(t) - z(t)$.

On note :

- i_0 l'intensité initiale ;
- i_∞ et ω_∞ l'intensité et la vitesse du moteur en régime permanent ;
- c_{r0} le couple résistant $c_r(t)$ supposé constant.

Question 26. Déterminer les expressions de $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0}$ et de $\left(\frac{I(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0}$. Mettre celles-ci sous forme canonique.

Afin de déterminer les caractéristiques du moteur, on applique à celui-ci un échelon de tension $(u_0(t))$ d'amplitude 24 V. On mesure la vitesse $\omega_m(t)$ et l'intensité $i(t)$. Les résultats obtenus sont donnés sur le document réponse.

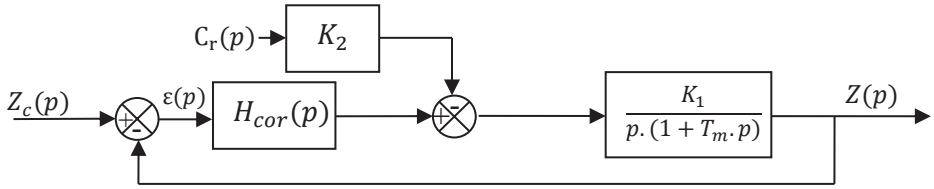
Question 27. Pour cette question, vous justifierez vos résultats à l'aide des tracés nécessaires sur le document réponse.

- A partir de ces courbes et des résultats de la question 26, indiquer si l'hypothèse d'une inductance négligeable est pertinente. Justifier la réponse.

- Dans cette hypothèse d'une inductance négligeable et à partir des équations (4), (5), (6) et (7), déterminer les expressions de i_0, i_∞ et ω_∞ en fonction de u_0, c_{r0}, R et K.
- Déduire de cette étude les valeurs numériques de K et R.
- Déterminer la valeur numérique du couple résistant ramené à l'arbre moteur c_{r0} et de l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur J_{eq}.

5.2 Réglage de l'asservissement

Les résultats précédents ont permis de modéliser l'asservissement de position par le schéma-bloc ci-dessous :



avec $K_2 = 2{,}78 \cdot 10^{-2}$ N^{-1}, $K_1 = 856$ s^{-1}, $T_m = 3 \cdot 10^{-2}$ s.
Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ N·m.
On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.

Le diagramme des exigences est donné figure 6 (page 5).

Question 28. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0}$.

Question 29. Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ($C_{r0} = 0$). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0}, définie comme la valeur finale de la position $z(t)$ dans le cas d'une consigne de position nulle ($z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

Question 30. Les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ sont donnés sur le document réponse pour $K_p = 1$. Pour la valeur de K_p déterminée précédemment, indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par les tracés nécessaires sur le document réponse.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.
Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur sont donnés sur le document réponse.
On souhaite une marge de phase d'au moins 60°.

Question 31. Justifier le choix de ce correcteur. Déterminer le coefficient K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur le document réponse.

Question 32. La figure 16 (page 19) donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec le correcteur précédemment réglé. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

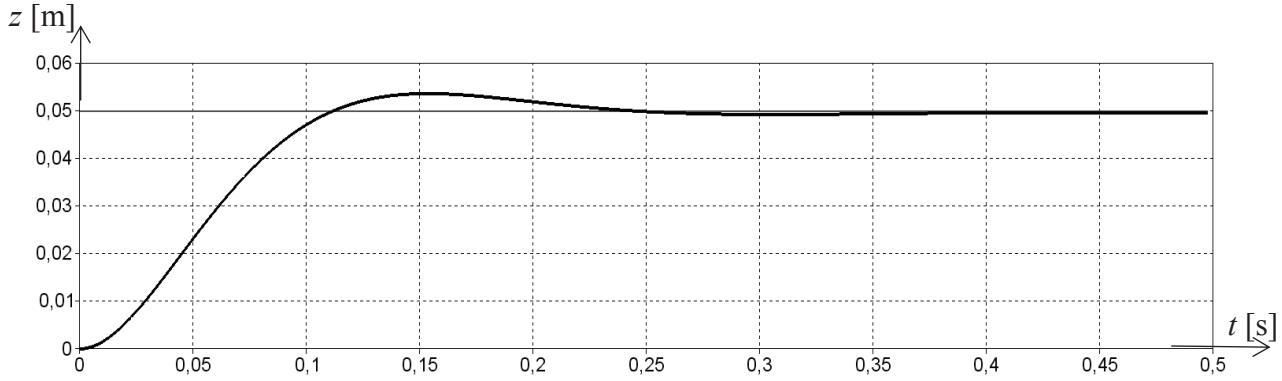


Figure 16 - Réponse à un échelon de position de 50 mm avec un correcteur PI

5.3 Précision du volume prélevé

Lorsque la tête de pipetage a atteint la position souhaitée, définie par les coordonnées X_M et Y_M, l'aiguille de la seringue est plongée dans le liquide à prélever. La hauteur immergée de l'aiguille, Z_v, définit la quantité de produit qui sera aspirée (figure 17).

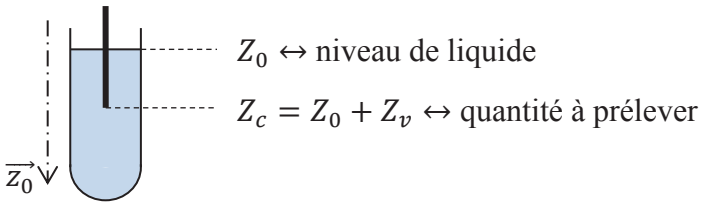


Figure 17 - Flacon et seringue

Chaque flacon n'étant pas rempli de la même façon, le niveau n'est donc pas connu précisément.
Un capteur capacitif détecte au fur et à mesure de la descente de l'aiguille la présence de liquide. Il délivre une information binaire (notée Niv). Lorsque l'aiguille est en contact avec le liquide, le capteur change d'état et inversement.
Un codeur incrémental, donnant 2 000 impulsions par tour de l'axe moteur, indique la position de l'aiguille par la variable Z_{cap} (position mesurée en mm).
La période d'échantillonnage de cette information est $Te = 10$ ms.
Le moteur est mis en marche dès qu'une valeur est affectée à la consigne de position Z_c ; l'ordre de mise en marche est noté V_d.
En début de descente, le niveau est inconnu, la consigne de position initiale Z_m est imposée : $Z_c = Z_m$. La seringue descend (V_d est assigné à 1).
Au passage du niveau détecté par le capteur inductif, correspondant au contact de l'aiguille avec le liquide, la position Z_0, donnée par le codeur incrémental, est mémorisée.
La consigne de position est alors modifiée à une valeur $Z_c = Z_0 + Z_v$.
L'aspiration débute lorsque la consigne est atteinte et s'arrête quand le détecteur de niveau ne perçoit plus de liquide en contact avec la seringue.
Le cycle de cette opération est décrit par le diagramme d'état figure 18.

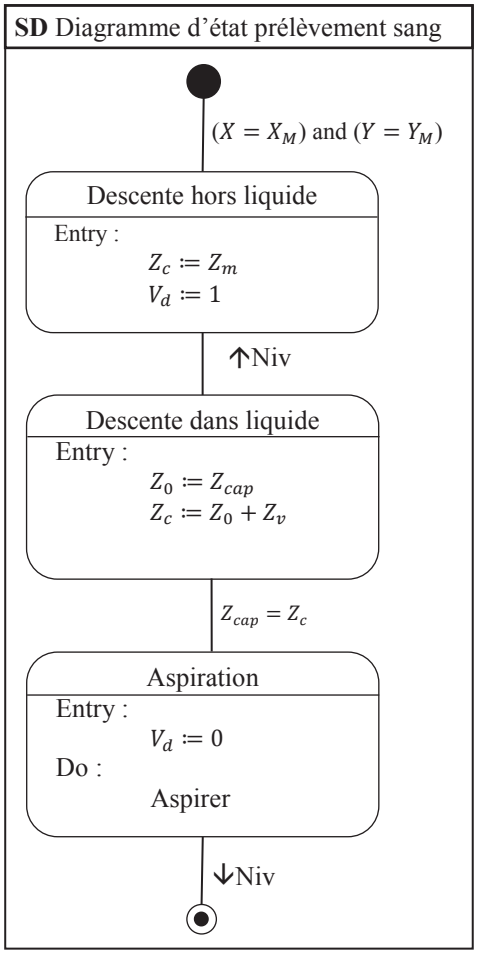


Figure 18 - Diagramme d'état

On rappelle les données suivantes :

- la vitesse maximale de rotation du moteur supposée égale à la vitesse nominale est : $N_{maxi} = 4\,150 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$;
- le rapport de réduction du réducteur est $k_r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{19{,}2}$ où ω_m et ω_r sont les vitesses en sortie moteur et réducteur ;
- le rayon du pignon (système pignon-crémaillère) est R_p= 10 mm.

Question 33. Calculer les erreurs de mesure de Z_0 dues à l'échantillonnage d'une part et à la conversion analogique numérique du codeur incrémental d'autre part. En déduire l'erreur maximale de position notée ΔZ_{mes}. Cette erreur est-elle compatible avec le cahier des charges ?

Pour pallier ce défaut de mesure, le constructeur met en place une nouvelle procédure explicitée par le diagramme de la figure 19 :

- le moteur peut avoir deux vitesses de rotation qui correspondent à une vitesse lente de la tête de pipetage ($-V_l$ en montée, $+V_l$ en descente) et une vitesse rapide ($-V_r$ en montée, $+V_r$ en descente) ; ces valeurs seront affectées à la variable V ;
- la consigne initiale de position $Z_c = Z_m$ reste inchangée ;
- lors de la détection de niveau, la position correspondante Z_{cap} est détectée et mémorisée, puis la tête remonte. La consigne est réglée à $Z_c = Z_0 - \Delta Z_{mes}$;
- lorsque le niveau est de nouveau détecté, l'aiguille s'arrête et le système mémorise la nouvelle position Z_0 donnée par le codeur, la consigne de position est alors modifiée à la valeur $Z_c = Z_0 + Z_v$ où Z_v est la hauteur définie précédemment correspondant au volume à prélever.

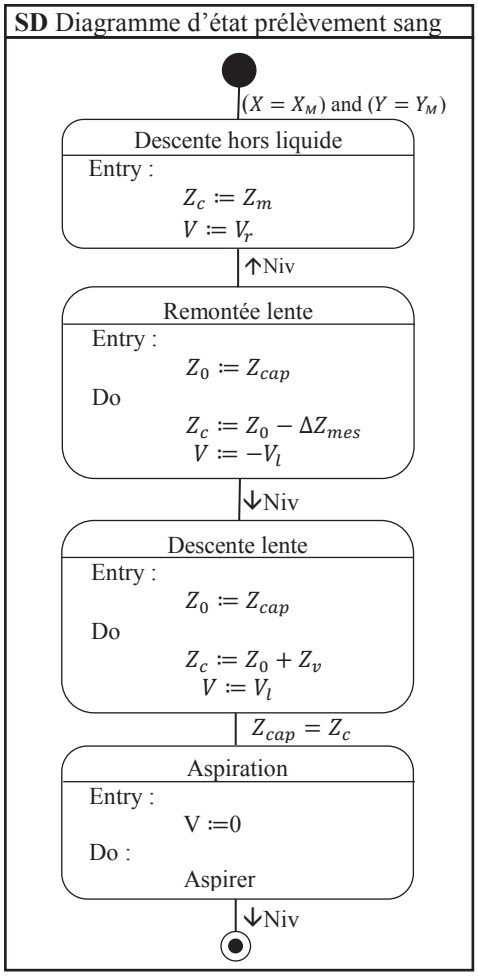


Figure 19 - Diagramme d'état corrigé

A vitesse lente, la vitesse de rotation du moteur est $N_{lent} = 1\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Le diamètre du flacon est $D_f = 15$ mm.

Question 34. Calculer la nouvelle erreur maximale de position $\Delta Z'_{mes}$ avec l'application de cette nouvelle procédure. Donner l'erreur de volume correspondante.

Synthèse

Question 35. Faire une synthèse des choix qui ont été faits pour satisfaire le critère de précision du volume prélevé.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1314 – D'après documents fournis

DANS CE CADRE

Académie : Session :

Examen ou Concours : **Concours Communs Polytechniques** Série* : **MP**

Spécialité/option* : Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve : **Sciences Industrielles**

NOM :

(en majuscules, suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms :

N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

Né(e) le

NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou Concours : **Concours Communs Polytechniques** Série* : **MP**

Spécialité/option :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve : **Sciences Industrielles**

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les et placez les intercalaires dans le bon sens.

Note : /20

Appréciation du correcteur :*

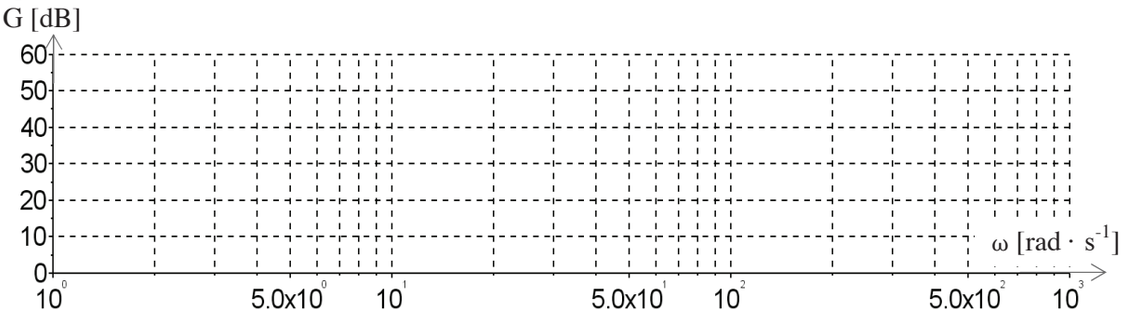
NB : pour des raisons techniques, le document DR1 se trouve au verso de cette page

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

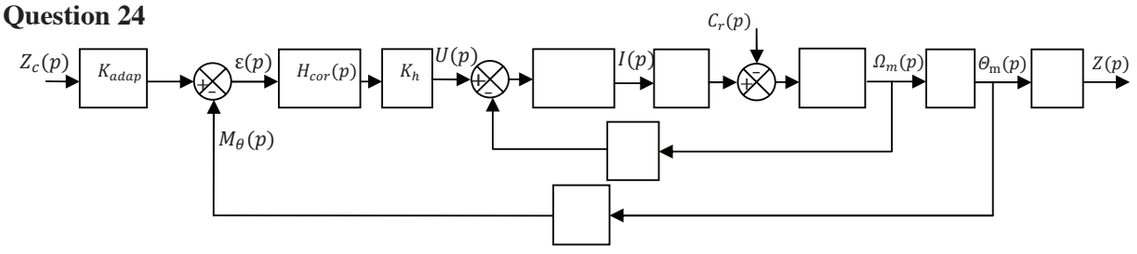
MPSI007

Document réponse à rendre avec la copie

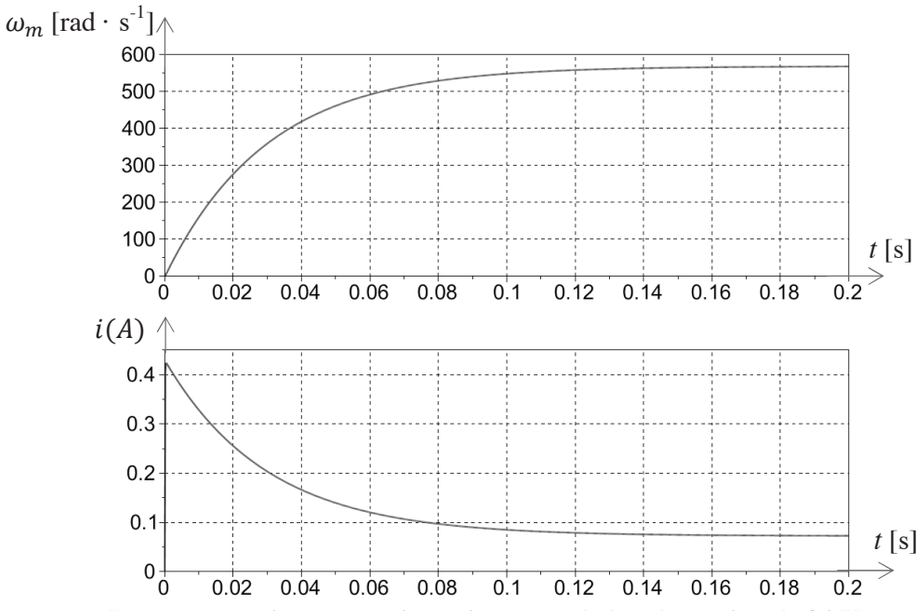
Question 8



Question 24



Question 27



Réponses en vitesse et en intensité à un échelon de tension de 24 V

B

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARRÉE

Question 30

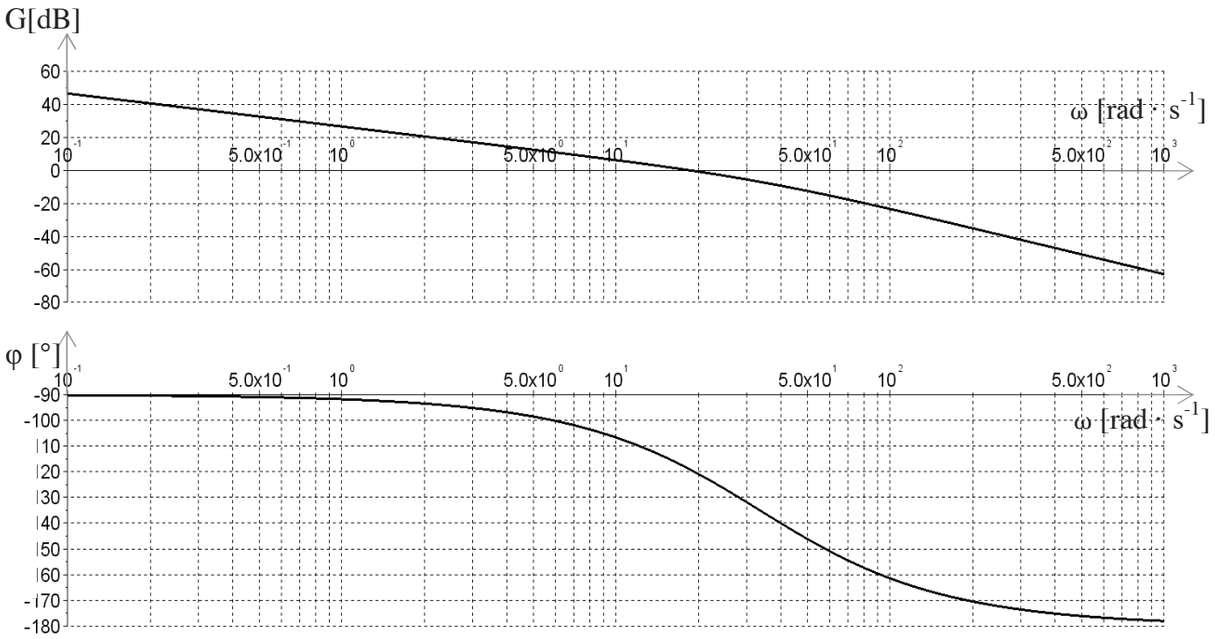


Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ pour $K_p = 1$

Question 31

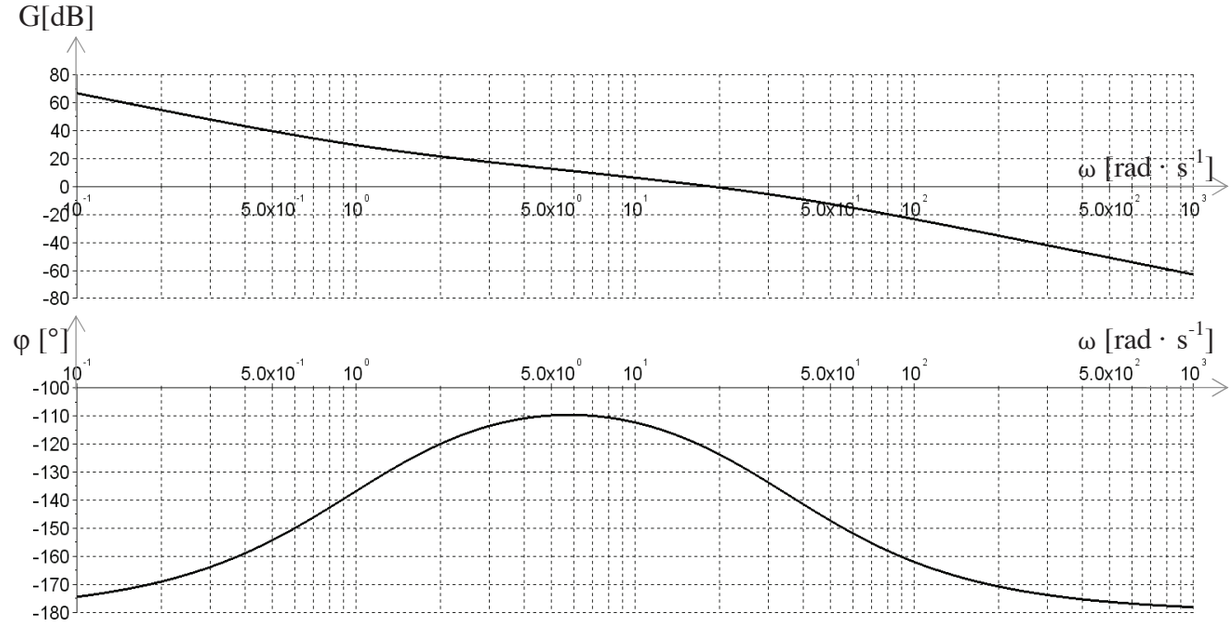


Diagramme de Bode de $H_{bo}(p)$ avec un correcteur PI pour $K_p = 1$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Cinématique du solide : paramétrage, vitesse, taux de rotation et torseur cinématique
- Énergétique : puissances, théorème de l'énergie cinétique, rendement
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Simplification d'un modèle : linéarisation, non-linéarités, pôles dominants, validité
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Piles, files et deques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp