Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2016, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice I : informatique
- Exercice II : matrice annulée par X^3 + X^2 + X
- Problème, première partie : questions préliminaires
- Problème, deuxième partie : interpolation de Hermite
- Problème, troisième partie : polynômes de Hermite

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2016/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Jeudi 5 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I : INFORMATIQUE

Les algorithmes demandés doivent être écrits en Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. Cet exercice étudie deux algorithmes permettant le calcul du pgcd (plus grand commun diviseur) de deux entiers naturels.

I.1. Pour calculer le pgcd de 3705 et 513, on peut passer en revue tous les entiers 1,2,3,$\cdots$,512,513 puis renvoyer parmi ces entiers le dernier qui divise à la fois 3705 et 513. Il sera alors bien le plus grand des diviseurs communs à 3705 et 513. Écrire une fonction `gcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers naturels non nuls, selon la méthode décrite ci-dessus. On pourra éventuellement utiliser librement l'instruction `min(a,b)` qui calcule le minimum de a et b. Par exemple `gcd(3705, 513)` renverra 57.

I.2. L'algorithme d'Euclide permet aussi de calculer le pgcd. Voici une fonction Python nommée `euclide` qui implémente l'algorithme d'Euclide.

```
def euclide(a,b):
    """Donn\'ees: a et b deux entiers naturels
       R\'esultat: le pgcd de a et b, calcul\'e par l'algorithme d'Euclide"""
    u = a
    v = b
    while v != 0:
        r = u % v
        u = v
        v = r
    return u
```

Écrire une fonction «récursive» `euclide_rec` qui calcule le pgcd de deux entiers naturels selon l'algorithme d'Euclide.

I.3. On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

I.3.a. Écrire les divisions euclidiennes successivement effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de $F_6 = 8$ et $F_5 = 5$ avec la fonction `euclide`.

I.3.b. Soit $n \geq 2$ un entier. Quel est le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} ? On pourra utiliser librement que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n = 2$. En déduire, sans démonstration, le nombre u_n de divisions euclidiennes effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} avec la fonction `euclide` .

I.3.c. Comparer pour n au voisinage de $+\infty$, ce nombre u_n, avec le nombre v_n de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul du pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} par la fonction `gcd`. On pourra utiliser librement que F_n est équivalent, au voisinage de $+\infty$, à $\phi^n/\sqrt{5}$ où $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

I.4. Écrire une fonction `fibo` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie le nombre de Fibonacci F_n. Par exemple, `fibo(6)` renverra 8.

I.5. En utilisant la fonction `euclide`, écrire une fonction `gcd_trois` qui renvoie le pgcd de trois entiers naturels. Par exemple, `gcd_trois(18, 30, 12)` renverra 6.

EXERCICE II

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A^2+A=0$.

II.1. Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.

II.2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

II.3. Démontrer que si A est inversible alors $\det(A)=1$.

PROBLÈME III

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de Hermite et la troisième partie quelques propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n, on note $P^{(n)}$ le n-ième polynôme dérivé de P. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

III.1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

III.1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

III.1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même du polynôme PQ.

III.2. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q\in\mathbb{R}(X)$ définis par $P=\prod_{i=1}^{n}P_i$ et $Q=\dfrac{P'}{P}$.

Démontrer par récurrence que $Q=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{P_i'}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ deux familles de réels quelconques.

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, démontrer que :

$$\text{si } P(a)=P'(a)=0 \text{ alors } (X-a)^2 \text{ divise } P.$$

III.3.b. En utilisant la question préliminaire **III.1**, démontrer que l'application φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P)=\big(P(x_1),P(x_2),\ldots,P(x_p),P'(x_1),P'(x_2),\ldots,P'(x_p)\big)$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

III.3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H\in\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1\leq i\leq p$, on a $P_H(x_i)=a_i$ et $P'_H(x_i)=b_i$.
Le polynôme P_H est appelé polynôme d'interpolation de Hermite.

III.4. Étude d'un exemple

Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite (défini à la question **III.3**) lorsque $p=2$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $a_1=1$, $a_2=0$, $b_1=-1$ et $b_2=2$ (si, au cours de ses calculs, le candidat a besoin d'inverser une matrice, il pourra le faire sans justification à l'aide de sa calculatrice).

III.5. Une formule explicite

Pour tout entier i tel que $1\leq i\leq p$, on considère le polynôme $Q_i=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$.

III.5.a. Soit i un entier vérifiant $1\leq i\leq p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1\leq k\leq p$ et démontrer qu'on a

$$Q'_i(x_k)=0 \text{ si } k\neq i \text{ et } Q'_i(x_i)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\frac{2}{x_i-x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire **III.2**.

III.5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P=\sum_{i=1}^{p}\Big[\Big(1-Q'_i(x_i)(X-x_i)\Big)a_i+(X-x_i)b_i\Big]Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de Hermite défini à la question **III.3**.

III.5.c. Retrouver le polynôme de la question **III.4** en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

III.6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

III.7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

III.8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$.

III.8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.9. Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\,.\,\|$.

III.9.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \left\langle P^{(n)} \mid H_0 \right\rangle$.

III.9.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0,H_1,...,H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.9.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leq i \leq 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

III.10. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, ..., a_p ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \text{ sinon.}$$

III.10.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.

III.10.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

III.10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Récursivité
- Complexité des algorithmes itératifs et récursifs
- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Structures algébriques usuelles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens



Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp