Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2018, filière MP

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Parties I et II : modèle de Bohr et résolution simplifiée
- Parties III et IV : spectre de raies et corrections de Sommerfeld
- Partie V : résolution interférométrique d'un doublet
- Parties VI et VII : structure fine et structure hyperfine

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.
La figure de la plaque Pioneer (page 16) est masquée ; le reste du sujet est reproduit sans retouche.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2018/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE

Vendredi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'énoncé de cette épreuve comporte 16 pages, dont 3 pages d'annexe.

Questionnements et découvertes autour de l'atome le plus simple de l'univers

Dans ce sujet, on propose d'étudier quelques étapes clés de l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Le problème est constitué de 7 parties, quasiment indépendantes, même s'il y a un fil conducteur entre elles. Il est conseillé au candidat de faire une première lecture rapide du sujet afin d'en retirer une vue d'ensemble. Les paragraphes rédigés en italique donnent des explications permettant de situer chaque partie dans son contexte scientifique historique, avec leurs hypothèses d'étude.

Les constantes fondamentales intervenant dans le problème sont rappelées ci-dessous avec leurs valeurs numériques données avec 5 chiffres significatifs :

- charge élémentaire : $e = 1{,}6022.10^{-19}$ C
- charge de l'électron : $-e$
- charge du proton : $+e$
- masse de l'électron : $m_e = 9{,}1094.10^{-31}$ kg
- masse du proton : $m_p = 1{,}6726.10^{-27}$ kg
- rayon de Bohr : $a_B = 5{,}2919.10^{-11}$ m
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2{,}9979.10^{8}$ m.s^{-1}
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}8542.10^{-12}$ F.m^{-1}
- constante de Planck : $h = 6{,}6261.10^{-34}$ J.s
- constante de Planck réduite : $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}0546.10^{-34}$ J.s
- constante énergétique de Rydberg : $R_y = \dfrac{m_e}{2\hbar^2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = 2{,}1799.10^{-18}$ J
- l'électron-volt, unité d'énergie : 1 eV = $1{,}6022.10^{-19}$ J

On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta f(r,\theta,z) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ et l'expression de deux intégrales et leur valeur :

- pour tout réel $r_0 > 0$: $\displaystyle\int_0^{\infty} r\exp(-r/r_0)\,dr = r_0^2$
- $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta = \frac{4}{3}$.

Même si elles ne sont pas systématiquement rappelées dans l'énoncé, le candidat utilisera à son initiative dans cette liste toute constante qu'il jugera nécessaire pour répondre aux questions posées.

Les applications numériques demandées seront réalisées avec 4 chiffres significatifs pour les questions Q1 à Q17, puis avec 3 chiffres significatifs à partir de la question Q18.

Partie I – Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron (vu comme ponctuel en M) tourne autour de son proton (lui aussi ponctuel et supposé immobile en *O*) en décrivant une orbite circulaire de rayon *r* = *OM* (**figure 1**). On note $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite.

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) comme indiqué sur la **figure 1** et $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est la base locale correspondante.

On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

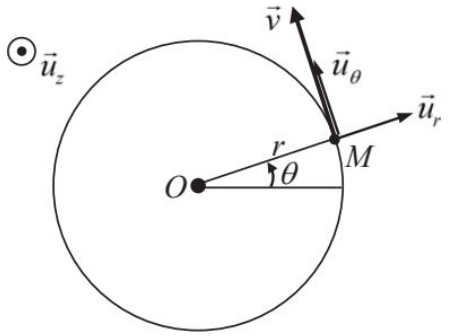


Figure 1 – Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton supposé immobile

Q1. Rappeler l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron.

Q2. Par l'application du théorème de la quantité de mouvement, déduire la norme *v* de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon *r* de l'orbite.

Q3. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron. Montrer que l'énergie cinétique E_c de l'électron vérifie : $E_c = -E_p/2$.

Q4. Exprimer la norme *L* du moment cinétique en *O* de l'électron en fonction de *r*, m_e, *e*, et ε_0.

En 1913, Bohr a postulé que L est un multiple entier de ħ en posant $L = n\hbar$, *où n est un entier naturel strictement positif et où ħ est la constante de Planck réduite. Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accéléré, ne rayonne pas d'énergie.*

Q5. De l'égalité $L = n\hbar$, déduire que la relation de quantification du rayon r_n de l'orbite caractérisée par l'entier *n* s'écrit sous la forme $r_n = a_B n^2$, avec a_B le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de m_e, *e*, ε_0 et ħ.

Q6. En déduire que l'énergie mécanique E_n de l'électron vaut $E_n = -\dfrac{R_y}{n^2}$, avec R_y la constante énergétique de Rydberg.

Q7. Quelle est la signification du rayon de Bohr ?
Donner la valeur de a_B en picomètres et celle de R_y en électron-volts.

Q8. Donner la vitesse v_n de l'électron sur l'orbite caractérisée par l'entier n. On l'exprimera en fonction de n, R_y et m_e.

Donner la valeur numérique de v_1. Le mouvement de l'électron vous semble-t-il relativiste ? Justifier.

Partie II – Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger (1926)

On rappelle l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste de masse m décrite par la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ dans un champ d'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + E_p(\vec{r})\psi(\vec{r},t)$$

où $\vec{r}$ désigne le vecteur position d'un point M quelconque de l'espace (M est repéré par ses coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, d'origine O) et Δ est l'opérateur Laplacien.

Q9. On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E de l'électron de l'atome d'hydrogène : on note $\psi(\vec{r},t) = \kappa(\vec{r})\,e^{-iEt/\hbar}$.

Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps concernant la partie spatiale de la fonction d'onde $\kappa(\vec{r})$ (On n'explicitera à ce stade ni la fonction énergie potentielle ni le Laplacien).

*Afin de simplifier la résolution de l'équation obtenue en **Q9**, nous nous limiterons à considérer que l'électron n'est spatialement détectable qu'en un lieu de points formé de cercles dans le plan d'équation z = 0, concentriques au point O où se trouve le proton (supposé ponctuel) et avec des rayons de valeurs quantifiées. Les points M où est évaluée la fonction d'onde sont ainsi repérés par leurs coordonnées polaires (r = R,θ), d'axe Oz, avec r contraint à prendre des valeurs R discrètes (que l'on cherche à déterminer). $\kappa(\vec{r})$ est alors une fonction continue de la variable θ : on la notera $\kappa(\theta)$.*

Q10. Expliciter la fonction énergie potentielle électrostatique de l'électron évoquée à la question **Q3** et pour laquelle on impose $r = R$.

Q11. Sachant que $E_p = 2E$ (résultat déduit de **Q3**), montrer que $\kappa(\theta)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\hbar^2}{2m_eR^2}\frac{d^2\kappa(\theta)}{d\theta^2} = E\,\kappa(\theta).$$

Résoudre cette équation pour les états liés de l'électron en posant $\eta^2 = \dfrac{m_eR\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$.

Q12. En remarquant que $\kappa(\theta+2\pi) = \kappa(\theta)$, déterminer une relation de quantification des valeurs de R, puis des énergies E. Commenter ces résultats.

Partie III – Spectre de raies de l'hydrogène

Cette partie n'est pas indépendante des précédentes.

*On rappelle que l'émission de lumière par un atome est due aux transitions entre deux états stationnaires (stationnaires au sens de Bohr (**partie I**), ou, au choix, au sens de la mécanique quantique (**partie II**)).*

Q13. Quelle est l'énergie du photon émis lors de la transition entre un état atomique d'énergie E_{sup} vers un état d'énergie plus faible E_{inf} ?
Montrer dans le cas de l'atome d'hydrogène que la longueur d'onde $\lambda_{nn'}$ de la raie d'émission correspondant à la transition de l'état d'énergie E_n vers l'état d'énergie $E_{n'}$ (avec $n' < n$) vérifie la relation de Ritz $\frac{1}{\lambda_{nn'}} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$. On explicitera la constante R_H en fonction de R_y, h et c.

Q14. Calculer les valeurs numériques des longueurs d'onde des quatre premières raies d'émission de la série de Balmer prédites par la formule de Ritz, c'est-à-dire les raies correspondant aux transitions des états n = 3, 4, 5, 6 vers l'état n' = 2 (représentées et nommées dans la partie gauche de la **figure 2** de la **partie IV**, page 6).
Le **tableau 1** ci-dessous indique les valeurs expérimentales établies en 1885.
Recopiez ce tableau sur votre copie en le complétant par les valeurs numériques précédemment calculées.
Les intervalles d'incertitudes expérimentales englobent-ils les valeurs de Ritz ?

Nom de la raie	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ_{Ritz}				
λ_{exp} (valeurs de 1885)	656,3 nm $\pm$ 0,3 nm	486,1 nm $\pm$ 0,2 nm	434,0 nm $\pm$ 0,2 nm	410,2 nm $\pm$ 0,2 nm

Tableau 1 – Longueurs d'onde des premières raies de la série de Balmer

Partie IV – Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H_α qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révèlera être formée de raies plus nombreuses. Sur la partie droite de la **figure 2** (page 6) *se trouve la carte actuelle simplifiée des niveaux d'énergie et des multiplets de raies qui composent la raie H_α (noter le changement d'échelle: facteur de zoom $\times 10^4$ par rapport au spectre de la série de Balmer à gauche).*

La première explication théorique de ces multiplets a été fournie par Sommerfeld en 1916 grâce à un traitement relativiste amélioré du modèle de Bohr utilisant la constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$, nommée ***constante de structure fine***.

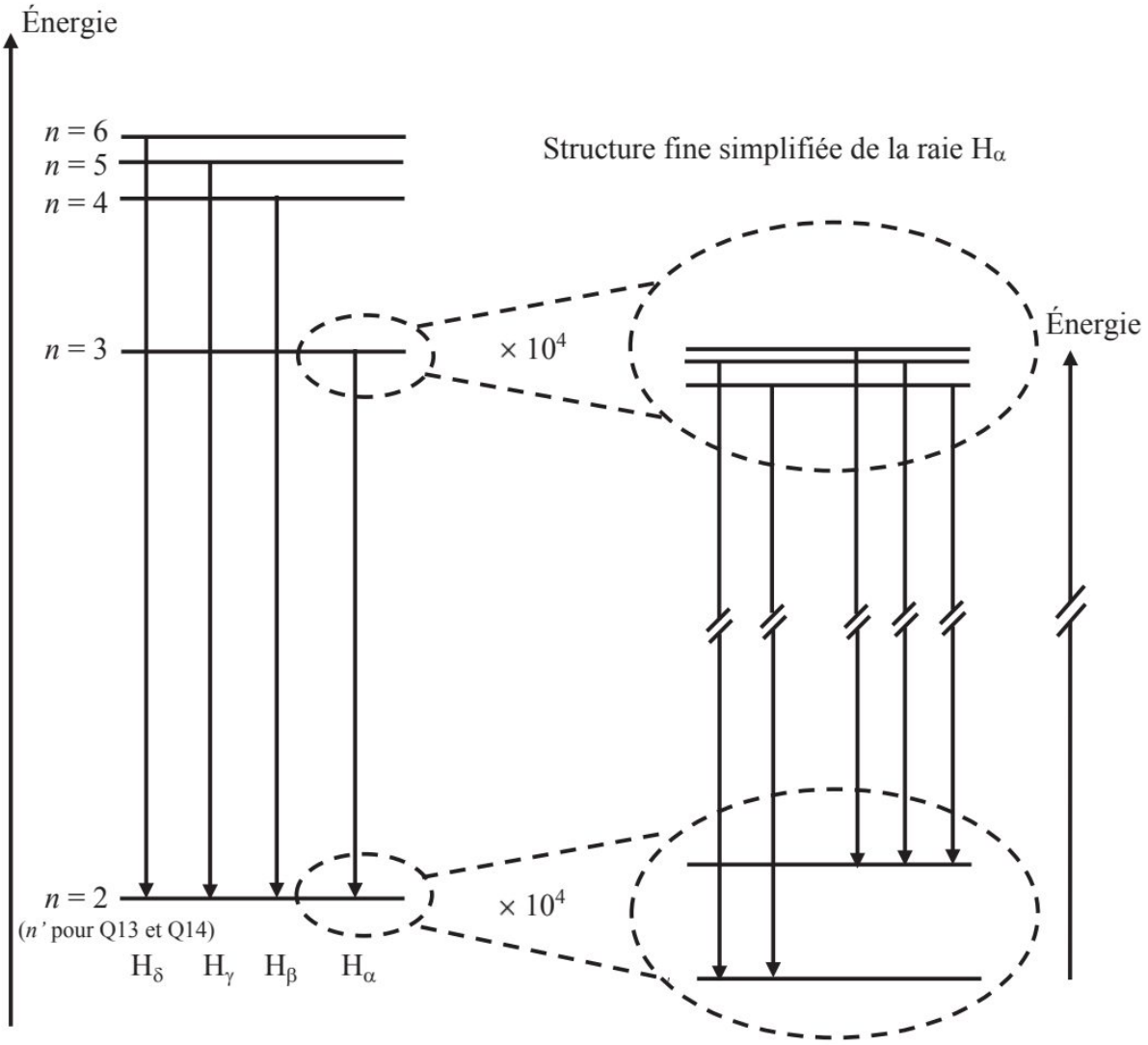


Figure 2 – Premières raies de la série de Balmer (à gauche) et structure fine (simplifiée) de la raie H_α (à droite)

Q15. En explicitant R_y dans l'expression de v_n obtenue en **Q8**, donner α en fonction de v_1 et de c. En déduire la dimension de α.

Q16. Donner la valeur numérique de α, puis celle de son inverse $1/\alpha$ (que l'on utilise bien plus volontiers).

Au terme de son calcul, Sommerfeld aboutit à l'expression des niveaux d'énergie $E_{n,l}$ suivants, indicés par deux entiers (n, l) avec $n \geq 1$ et l = 0, 1, 2,..., n – 1 :

$E_{n,l} = -\dfrac{R_y}{n^2}\left(1+\alpha^2 \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n}{l+1}-\dfrac{3}{4}\right)\right)$ *où α est la constante de structure fine introduite ci-dessus.*

Trois années auparavant, Bohr avait trouvé (question **Q6**) *l'expression suivante à un seul indice entier :* $E_n = -\dfrac{R_y}{n^2}$.

Q17. Commenter la formule de Sommerfeld en liaison avec la formule de Bohr et la faible valeur de α.
Combien de sous-niveaux d'énergie ce calcul prévoit-il pour les niveaux $n = 2$ et $n = 3$ de la formule de Bohr ?

Q18. Ces sous-niveaux constituent la structure fine de la raie $H\alpha$. En reproduisant sur votre copie la partie droite de la **figure 2** (page 6), identifier chacun de ces niveaux d'énergie par leurs indices (n, l) respectifs.
En déduire, en fonction de R_y et α, l'expression de l'écart $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0}$ entre les deux sous-niveaux $n = 2$.
Calculer la valeur numérique de ΔE_f en électron-volts.

Q19. On rappelle que le nombre d'onde σ d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde. Exprimer en fonction de h, c, et ΔE_f, l'écart $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$ des nombres d'onde σ_a et σ_b des radiations émises lors des deux transitions (a) et (b) suivantes :
(a) : obtenue par désexcitation depuis le niveau ($n = 3$, $l = 1$) vers le niveau ($n = 2$, $l = 0$)
(b) : obtenue par désexcitation depuis le niveau ($n = 3$, $l = 1$) vers le niveau ($n = 2$, $l = 1$).
Calculer $\Delta\sigma$ en cm^{-1}, unité habituelle des spectroscopistes.

Immédiatement après l'annonce du résultat négatif de leur expérience consacrée à confirmer l'existence de l'éther luminifère, Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie $H\alpha$ comme un doublet de nombre d'onde moyen $\sigma_m = 15\,237{,}40\ cm^{-1}$ et d'écart spectral $\Delta\sigma_{exp} = 0{,}360\ cm^{-1}$ (valeurs expérimentales de 1887).

Q20. De quelle couleur est ce doublet ? Calculer son écart relatif en nombre d'onde $\Delta\sigma_{exp} / \sigma_m$.
Comparer cet écart relatif à celui du doublet jaune du sodium (λ_1 = 589,0 nm et λ_2 = 589,6 nm).

Partie V – Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscope à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

Le **schéma 1** de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné page 8. On note Ox et Oy deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre. S est une source lumineuse ponctuelle située sur Ox. M_1 et M_2 sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à Ox en H_1 et respectivement à Oy en H_2. Le trait incliné à 45°, noté L_s, schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux. L_p désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe Oy. Un écran E est placé dans le plan focal image de L_p. On note C le foyer image de L_p.

Q21. Nommer les lames qui composent L_s. Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.

Q22. Un rayon lumineux, noté (r), émis par S, a été représenté. Reproduire le schéma ci-dessous sur la copie avec $SO = OH_1 = 2\ OH_2$ et le compléter en faisant un tracé soigné des deux rayons (r_1) et (r_2) qui émergent de l'interféromètre après division de (r). On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

Q23. Sur ce même schéma positionner le miroir fictif M'_1 justifiant de la dénomination « lame d'air » en faisant apparaître le point Q_1 intersection de M'_1 avec les deux prolongements fictifs ad hoc de (r_1) et de (r_2).
Enfin, terminer le tracé des rayons (r_1) et (r_2) après la lentille L_p jusqu'à l'écran E (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).

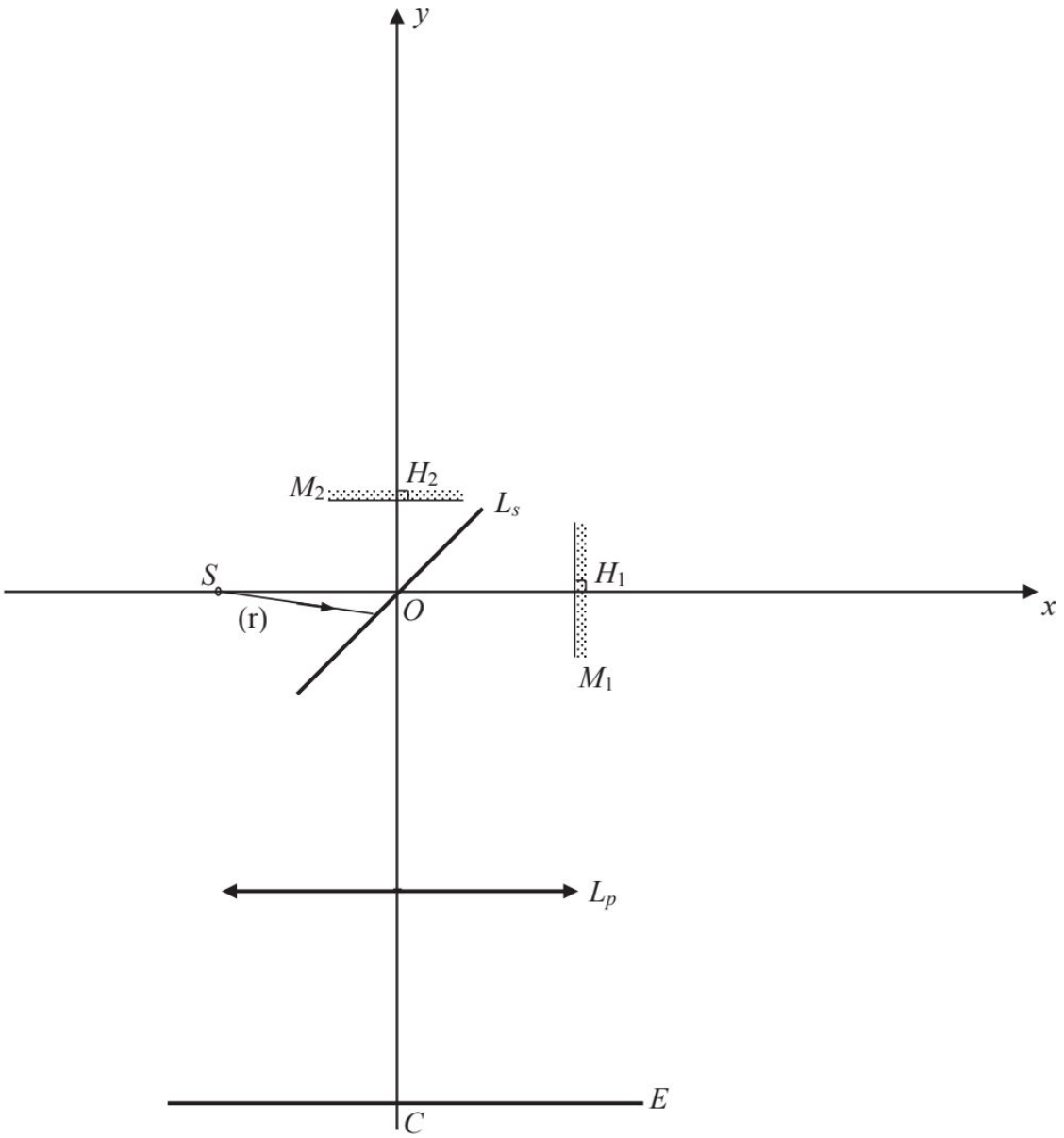


Schéma 1 – Interféromètre de Michelson

Q24. Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?

Q25. En appelant e l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche δ au centre *C* de l'écran.

Q26. On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes σ_1 et σ_2. Donner l'expression des ordres d'interférence p_1 et p_2 en *C* pour chaque radiation du doublet en fonction de δ, σ_1 et σ_2.

Q27. Pour quelles valeurs de la différence $p_1 - p_2$ y-a-t-il brouillage en *C* ?
En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, la variation D_δ de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage. Comment nomme-t-on ces situations ?

Application numérique : dans le cas du doublet H_α (écart spectral $\Delta\sigma_{exp} = 0{,}360$ cm^{-1}), calculer la variation D_e de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

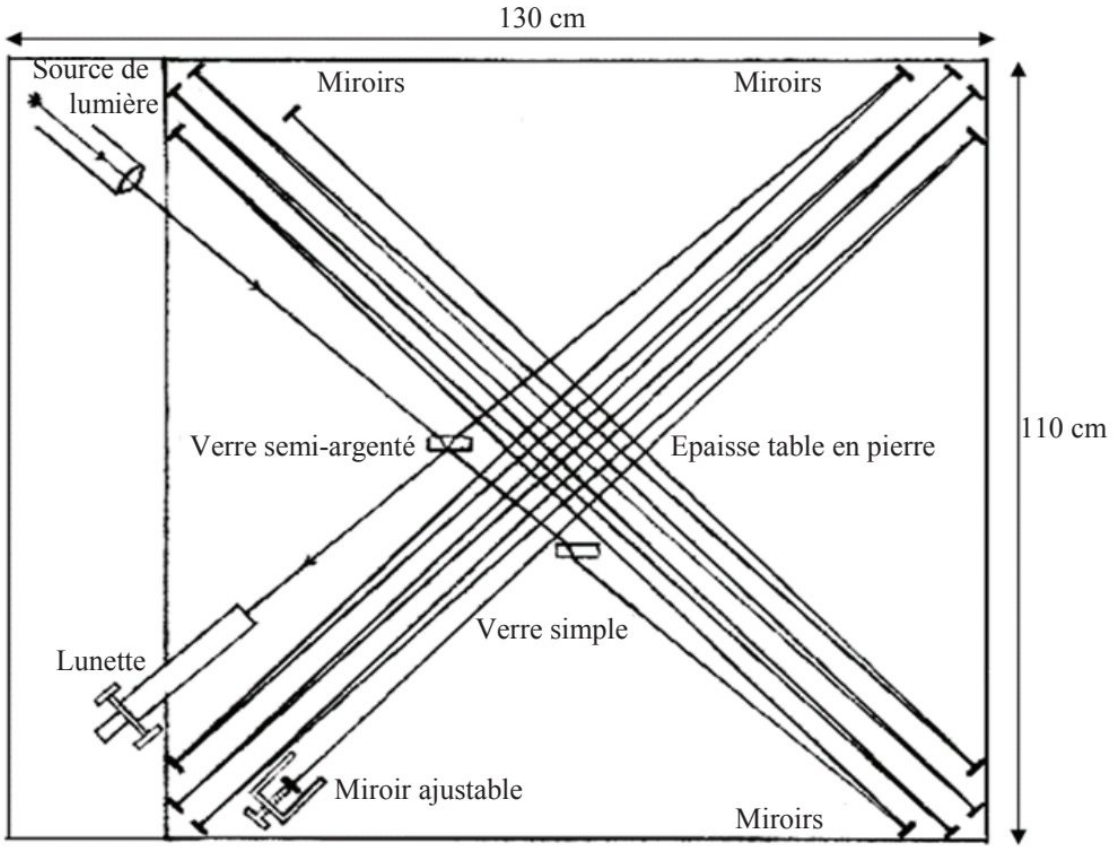


Figure 3 – Schéma des trajets lumineux dans l'interféromètre de Michelson et Morley de 1887 (source : *http://ondes-relativite.info/DominiqueCabala/chap4_histo.htm*)

Q28. À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie H_α présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à L_0), ils ont compté un total de 6 brouillages de part et d'autre du contact optique (3 de chaque côté) pour un déplacement du miroir égal à 1/160^e de la longueur L_0.
Calculer la valeur de L_0 pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

Q29. L'interféromètre, construit dans un sous-sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure.
La table faisait environ 130 cm $\times$ 110 cm de cotés. La longueur L_0 des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers-retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la **figure 3** (page 9).

À partir de la **figure 3** (page 9), donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est-il en accord avec la valeur L_0 trouvée à la question **Q28** ?

Partie VI – Calcul d'une structure fine par l'interaction spin-orbite

Une interprétation globale satisfaisante de l'ensemble des spectres observés, ainsi que des dédoublements de raies obtenus lors de l'application d'un champ magnétique extérieur (effet Zeeman), n'a pu voir le jour qu'avec les travaux de Pauli, puis de Goudsmit et Uhlenbeck en 1925 conduisant à introduire le spin. Dans ce cadre nouveau, on explique la structure fine des raies spectrales par une levée de dégénérescence des niveaux d'énergie produite par l'interaction entre le moment magnétique de spin de l'électron et le champ magnétique créé par le proton en mouvement autour de l'électron dans le changement de référentiel.

Q30. Dans cette question, on reprend le modèle de Bohr de la **partie I, figure 1** page 3 : dans le référentiel du laboratoire, le proton est immobile en O et l'électron décrit une orbite circulaire de rayon r centrée sur le proton, à la vitesse v. Exprimer en fonction de r, m_e, v et $\vec{u}_z$ le moment cinétique orbital en O de l'électron, noté $\vec{L}$.

Q31. En se plaçant dans le référentiel de l'électron, c'est le proton qui est en mouvement circulaire autour de l'électron. Donner les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ ressenti par l'électron dû au mouvement du proton en fonction de μ_0, e, v, r et $\vec{u}_z$, puis de μ_0, e, m_e, r et $\vec{L}$.

On rappelle à cet effet l'expression du champ magnétique $\vec{b}$ créé par une spire circulaire de courant d'intensité I, d'axe Oz et de rayon r, en son centre : $\vec{b} = \dfrac{\mu_0 I}{2r}\vec{u}_z$, le sens de $\vec{u}_z$ étant relié à celui de I par la "règle du tire-bouchon".

Q32. On note $\vec{\mu}_s$ le moment magnétique de spin de l'électron.

On rappelle que $\vec{\mu}_s = g_e \gamma_e \vec{S}$ où $\vec{S}$ est le moment cinétique de spin, $\gamma_e = -\dfrac{e}{2m_e}$ le rapport gyromagnétique de l'électron et $g_e = 2{,}0023$ le facteur de Landé de l'électron.

On rappelle également que l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ interagissant avec un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ est : $E = -\vec{\mu}.\vec{B}$.

On note E_{so} l'énergie d'interaction de $\vec{\mu}_s$ avec le champ $\vec{B}$ (indice "*so*" pour "spin-orbite"). Montrer que cette énergie d'interaction s'écrit :

$$E_{SO} = g_e \alpha^2 R_y \left(\frac{a_B}{r}\right)^3 \frac{\vec{L}.\vec{S}}{\hbar^2} .$$

On utilisera pour cela l'identité $\gamma_e^2 \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{a_B^3 \alpha^2 R_y}{\hbar^2}$, dans laquelle α est la constante de structure fine introduite à la fin du paragraphe en italique de la **partie IV** (page 5), R_y est la constante énergétique de Rydberg et a_B est le rayon de Bohr.

La projection sur $\vec{u}_z$ du moment cinétique de spin de l'électron est quantifiée : $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$, celle du moment cinétique orbital l'est aussi : $L_z = m_l \hbar$ où m_l est un entier relatif tel que $-l \le m_l \le l$ avec $l = 0, 1, 2..., n-1$.

Q33. Citer, en la décrivant succinctement (particules utilisées, principe de la manipulation, résultats) l'expérience historique qui a prouvé la quantification du moment cinétique et magnétique.

En faisant intervenir le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, chaque état atomique est caractérisé par un triplet de nombres (n, l, j) avec n le nombre quantique principal ($n \ge 1$), l le nombre quantique de moment cinétique orbital ($l = 0, 1, 2..., n-1$) et j un troisième nombre (associé à la quantification de $\|\vec{J}\|$), tel que $j = \frac{1}{2}$ si $l = 0$ et $j = l - \frac{1}{2}$ ou $l + \frac{1}{2}$ si $l \ge 1$.

Dans ce modèle à trois nombres quantiques (n, l, j) la formule classique de E_{SO} (obtenue en **Q32)** doit être remplacée par la forme suivante

$$E_{SO,n,l,j} = g_e \alpha^2 R_y \left(\iiint \left|\psi_{n,l}(\vec{r})\right|^2 \left(\frac{a_B}{r}\right)^3 d^3\vec{r} \right) \frac{\vec{L}.\vec{S}}{\hbar^2}$$

avec $\vec{L}.\vec{S} = \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \frac{\hbar^2}{2}$, l'intégrale triple portant sur tout l'espace, $\psi_{n,l}(\vec{r})$ désignant la valeur de la fonction d'onde de l'électron au point de l'espace repéré par le vecteur position $\vec{r}$ dans un système de coordonnées sphériques avec pour origine le proton et $d^3\vec{r}$ étant la notation couramment utilisée pour désigner un élément de volume.
Avec les notations (r, θ, φ) habituelles (utilisées par exemple dans le **document 1**, en annexe, page 14) : $d^3\vec{r} = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

Q34. Commenter le remplacement de la quantité $\left(\frac{a_B}{r}\right)^3$ par l'intégrale $\iiint \left|\psi_{n,l}(\vec{r})\right|^2 \left(\frac{a_B}{r}\right)^3 d^3\vec{r}$.

Calculer cette intégrale pour $n = 2$ et $l = 1$.

On donne pour cela : $\left|\psi_{2,1}(\vec{r})\right| = \frac{1}{(4a_B)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{r}{a_B} \sin\theta \, \exp\left(-\frac{r}{2a_B}\right)$.

Q35. On s'intéresse à la structure fine du niveau $n = 2$ de l'atome d'hydrogène.
Faire un décompte des différents états $(2, l, j)$ possibles et exprimer en fonction de g_e, α et R_y leurs énergies d'interaction spin-orbite correspondantes.

On note $E_{so,n=2}^{\min}$ (respectivement $E_{so,n=2}^{\max}$) la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs prises par E_{so} dans le cas où $n = 2$.

Donner l'expression de la différence $\Delta E_{so,n=2} = E_{so,n=2}^{\max} - E_{so,n=2}^{\min}$ en fonction de g_e, α et R_y.

L'introduction du spin par Uhlenbeck et Goudsmith en 1925 a permis d'expliquer la levée de dégénérescence des niveaux d'énergie (structure fine et effet Zeeman), mais il subsistait une difficulté pour l'écart des niveaux de la structure fine : la valeur calculée en considérant un facteur de Landé $g_e \simeq 2$ pour l'électron conduisait au double de la valeur attendue. On retrouvait le bon résultat si on posait $g_e = 1$, mais c'était alors l'effet Zeeman qui était incorrectement traité.
En 1927, Llewellyn Thomas parvint à montrer que la valeur $g_e \simeq 2$ n'est à remettre en question pour aucun des deux effets, mais qu'il faut corriger l'expression de l'interaction spin-orbite dans le référentiel du laboratoire par un facteur 1/2 à cause d'un effet relativiste. Ce résultat (appelé précession de Thomas) a définitivement démêlé le lien étroit entre spin et relativité.

Donner l'expression corrigée de $\Delta E_{so,n=2}$ après l'analyse de Thomas.
La comparer à ΔE_f trouvée en **Q18** à partir de la formule de Sommerfeld.

Partie VII – Encore plus fin (!) : la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène

Après plusieurs années passées à étudier la structure de la Voie lactée par des moyens optiques, l'astronome néerlandais Jan Oort réalisa l'importance d'une fenêtre d'observation dans le domaine des ondes radio afin de contourner le problème de l'absorption de la lumière visible par les nuages de poussière galactiques. L'hydrogène étant l'élément le plus abondant dans l'univers, Oort demanda à son élève H.-C. Van de Hulst d'étudier la possibilité d'une raie spectrale dans le domaine radio en rapport avec l'hydrogène. Celui-ci aboutit en 1944 à la prévision d'une raie due à la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène. Cette raie, appelée raie de l'hydrogène à 21 cm, a été observée pour la première fois en 1951 par Ewen et Purcell. Cette nouvelle fenêtre d'observation astronomique a permis de découvrir la forme spirale des bras de notre galaxie.

À l'aide notamment des **documents 1, 2, 3** et **4** fournis en annexe (pages 14 à 16), répondre aux questions suivantes.

Q36. Justifier le choix et la valeur de la fréquence suggérée par *Morrison et Cocconi* (**document 4**).
Calculer, en électron-volts, l'écart en énergie $\Delta E_{hf\ exp}$ (indice "exp" pour expérimental) entre les deux niveaux hyperfins de l'atome d'hydrogène impliqués dans la raie à 21 cm (en fait 21,1 cm pour être plus précis).

Q37. Rappeler l'unité de moment magnétique dans le Système International. On appelle magnéton de Bohr (μ_B), respectivement magnéton nucléaire (μ_N), la norme du moment magnétique de spin de l'électron, respectivement du proton. Donner les valeurs numériques de μ_B et de μ_N.

Q38. Établir une formule (classique) d'estimation de l'écart énergétique entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène (on prendra le rayon de Bohr a_B comme la distance séparant le proton de l'électron). On attend une expression $\Delta E_{hf,\text{classique}}$ faisant intervenir μ_0, μ_B, μ_N, et a_B .

Q39. La résolution de l'équation de Schrödinger donne en fait $\Delta E_{hf} = (16/3) \times \Delta E_{hf,classique}$.
Application numérique : calculer ΔE_{hf}.
La valeur trouvée est-elle cohérente avec la valeur expérimentale $\Delta E_{hf\ exp}$ de la question **Q36** ?

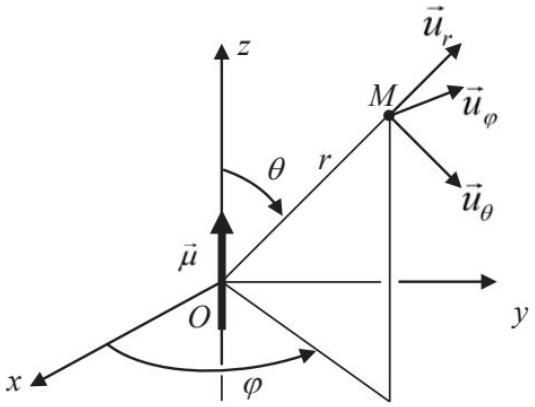
Q40. Il est indiqué dans le **document 4** (page 16) que la longueur d'onde 21 cm peut servir d'unité de mesure. Pouvez-vous citer un exemple de transition hyperfine intervenant dans la définition d'une unité SI ?

FIN

ANNEXE - Documents utiles pour la partie VII

Document 1 – Expression du champ magnétique créé en un point M de coordonnées sphériques (r,θ,φ) par un moment magnétique $\vec{\mu} = \mu \vec{u}_z$:

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{2\mu\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\mu\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta\right)$$



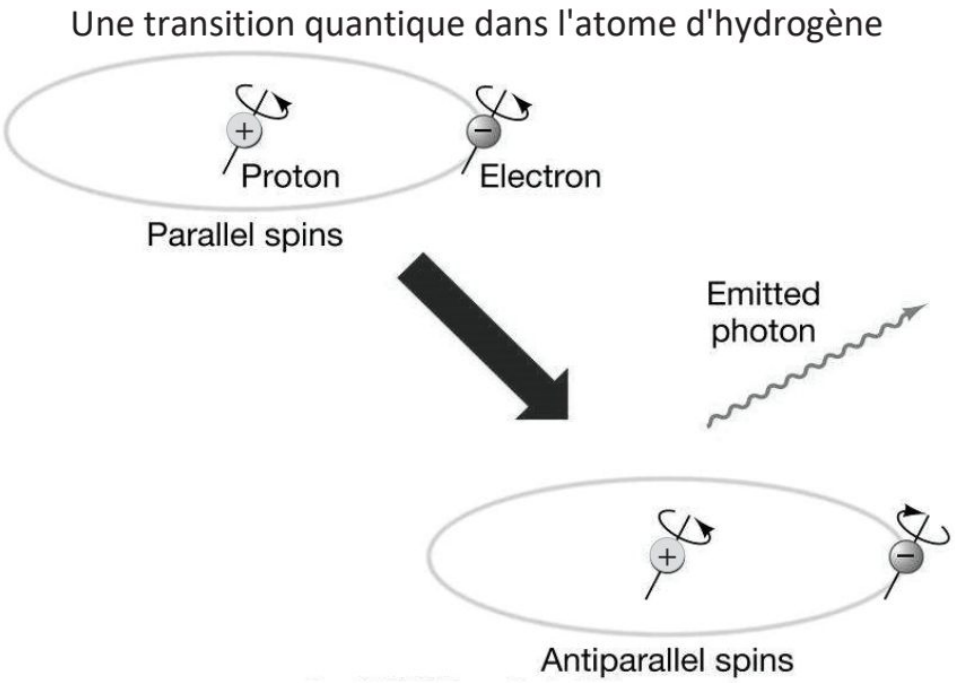
Document 2 – Rappels de mécanique quantique et tableau de valeurs pour l'électron et le proton

Le moment magnétique de spin $\vec{\mu}$ et le moment cinétique de spin $\vec{S}$ d'une particule sont liés par la formule $\vec{\mu} = g\gamma\vec{S}$ où γ est le rapport gyromagnétique de la particule et g son facteur de Landé.

Particule	Électron	Proton
Moment cinétique de spin S_z (en projection sur un axe Oz quelconque)	$\pm\frac{1}{2}\hbar$	$\pm\frac{1}{2}\hbar$
Rapport gyromagnétique	$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$	$\gamma_p = \frac{e}{2m_p}$
Facteur de Landé	$g_e = 2{,}0023$	$g_p = 5{,}5857$

Document 3 – *Extrait de texte sur la structure hyperfine,* consultable à l'adresse suivante : *http://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/physique-raie-21-cm-cle-astrophysique-cosmologie*

L'atome d'hydrogène possède des niveaux d'énergie hyperfins résultant de l'interaction entre le moment magnétique de spin de son électron (appelé magnéton de Bohr) et le moment magnétique de spin de son proton (appelé magnéton nucléaire). Selon que ces deux spins sont parallèles ou antiparallèles, le niveau d'énergie de l'atome n'est pas le même et une transition avec émission d'un photon d'une longueur d'onde de 21 cm est possible.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Document 4 – *La raie à 21 cm : un moyen de communication avec une éventuelle intelligence extraterrestre ?*

En 1959 Morrison et Cocconi suggérèrent que la meilleure fréquence pour chercher des signaux provenant de sources extraterrestres intelligentes serait 1420 MHz. Dans le cadre du programme américain SETI (acronyme pour "search for extra-terrestrial intelligence") mis en place dans les années 1960, les premiers signaux émis depuis la Terre pour établir un contact avec une éventuelle intelligence extraterrestre ont été envoyés en 1974 par le grand radiotélescope situé à Arecibo (Puerto Rico). Plusieurs sondes spatiales (Pioneer 10, Voyager 1 et Voyager 2) ont également été lancées dans le but d'explorer des régions externes au système solaire. Sur la sonde Pioneer 10, lancée le 2 mars 1972, une plaque en aluminium anodisé a été fixée, comportant une gravure pouvant servir de message.

La plaque montre un homme et une femme à l'échelle de la sonde et la position du Soleil (position of Sun) par rapport à 14 pulsars et au centre de la Galaxie. En haut à gauche, une représentation de la transition hyperfine de l'atome d'hydrogène donne une longueur d'onde de 21 cm, qui peut servir d'unité de mesure. Ainsi, la hauteur de la femme à droite est donnée en numérotation binaire comme étant 8 fois la longueur d'onde de la raie de l'hydrogène (binary equivalent of decimal 8). Les pulsars sont identifiables par leur fréquence de rotation en binaire, exprimée comme un multiple entier de celle de la raie d'hydrogène. En bas, le Système solaire et la planète d'origine de la sonde sont représentés avec les distances relatives des planètes (planets of Solar System and binary relative distances), également en numérotation binaire. © Nasa

Bien qu'aucune communication avec Pioneer 10 ne soit plus possible depuis janvier 2003, la sonde poursuit actuellement son voyage au-delà du système solaire...

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1055 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Électrostatique : formulation locale et condensateur
- Structure électronique de l'atome et classification périodique
- Interféromètre de Michelson
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Magnétostatique : formulation locale

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp