Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2022, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : le code d'entrée oublié
- Partie I : intégrales fonctions de leur borne
- Partie II : calcul des intégrales de Fresnel
- Partie III : étude d'une série de fonctions

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2022/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème dont les parties sont largement indépendantes.

EXERCICE

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres dont chacun est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

Q1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ puis en déduire son espérance.

Q2. En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?

Q3. M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi par les codes non encore testés. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q4. À la place de la stratégie précédente, M. Toutlemonde essaye des codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non. On note encore X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q5. *Informatique Pour Tous.*
Compléter, en langage Python, le script suivant pour qu'il simule une personne essayant de deviner le code 4714 :

```
code=4714
n=int(input('Taper un code à 4 chiffres : '))
k= ……
while ……
      ……
      ……
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

(…… représente une instruction ou une partie d'instruction à compléter.)

Pour ne plus oublier le code, M. Toutlemonde décide de l'écrire sur un papier qu'il garde dans sa poche. Pour ne pas se faire dérober le code il le crypte de la manière suivante : il remplace chacun des 4 chiffres par lui-même additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté 9269.

Q6. *Informatique Pour Tous.*
Écrire, en langage Python, une fonction `crypte(m)` qui reçoit en entrée une liste m de 4 chiffres et renvoie en sortie la version cryptée de cette liste. Par exemple, `crypte([4,7,1,4])` renvoie `[9,2,6,9]`.

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x)=\int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$.

Q7. Démontrer que H est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

Q8. Étudier la parité de la fonction H.

Q9. Démontrer que la fonction $t\mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q10. Si $x>0$, démontrer que :

$$H(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\,.$$

Q11. Pour $x>4\pi^2$, en déduire que :

$$H(x)-H(\sqrt{2\pi})=-i\frac{e^{ix^2}}{2x}+\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}-\frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}du\,.$$

Q12. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge.

Q13. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `I(f,a,b,n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles ou complexes, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)dt$ calculée avec n rectangles.

Q14. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `H(x,n)` qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée de $H(x)$ calculée avec la fonction de la question précédente. On rappelle que le code Python, pour e^{it^2}, est `exp(1j*t**2)`.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction *g* d'expression :

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour cela, on pose $f(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

Q15. Si $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et t^2-i.

Q16. Démontrer que *g* est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

Q17. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$. À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=0$. En déduire la limite de *g* en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q18. Démontrer que *g* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Q19. On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$.

Vérifier que :

$$\forall x>0,\quad g'(x)=-2\sqrt{\pi}e^{ix^2}\,.$$

Q20. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$.

On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i}=\frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t=\pi\sqrt{2}$. Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

Q21. En déduire que :

$$\forall\, x>0,\quad g(x)=\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}-2\sqrt{\pi}\times H(x)$$

où la fonction *H* a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{it^2}\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x)=\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Q22. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{N}a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n-a_{n+1}\right)b_n+a_{N+1}b_N-a_1b_0\ ,$$

démontrer que la série $\sum a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)$ converge.

Q23. Soient $x\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\times\frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\ .$$

Q24. À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0,2\pi[$.

Q25. On admet dans cette question que si $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Démontrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\le C\ .$$

Q26. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de :

$$I(x)=\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Q27. Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{ix}-1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1161 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres complexes et trigonométrie
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp