Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2023, filière MP

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique
- Partie II : électrodynamique classique
- Partie III : thermodynamique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2023/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

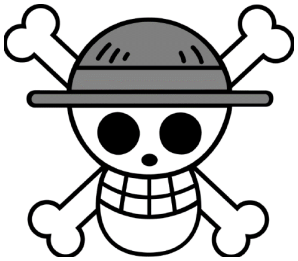
- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est constitué de 3 parties totalement indépendantes :

- la **partie I** fait appel au cours de mécanique du point et à la propagation des ondes mécaniques,
- la **partie II** fait appel au cours d'électromagnétisme,
- la **partie III** fait appel au cours de thermodynamique.

Un formulaire est placé en fin de sujet.



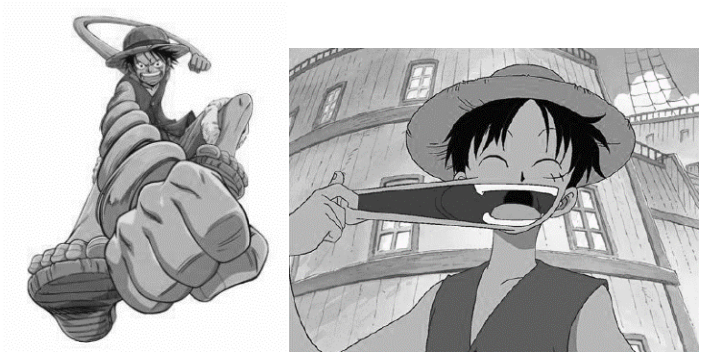
One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon.*

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.

Ce sujet aborde diverses questions de physique très librement inspirées de cette œuvre.

PARTIE I - *Gomu no jet pistol* : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique



Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. On se propose ici de modéliser un exemple d'extension élastique.

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox). En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_o\left[1 - e^{-a(x-x_o)}\right]^2$$

avec V_o , a et x_o des constantes réelles positives.

Q1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre $x_{éq}$.

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre : $x = x_{éq} + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| \ll x_{éq}$.

Q2. En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε, montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_o et de a.

Q3. Si on appliquait cette force à une particule de masse *m* et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_o de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $t \to \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.

Q4. Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur *k* et de longueur à vide ℓ_o. Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note *m* cette masse des masselottes entre les ressorts, $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$ le vecteur position de la n^{ième} masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre *a* (**figure 1**) est égale à la longueur à vide, $\ell_o = a$.
On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

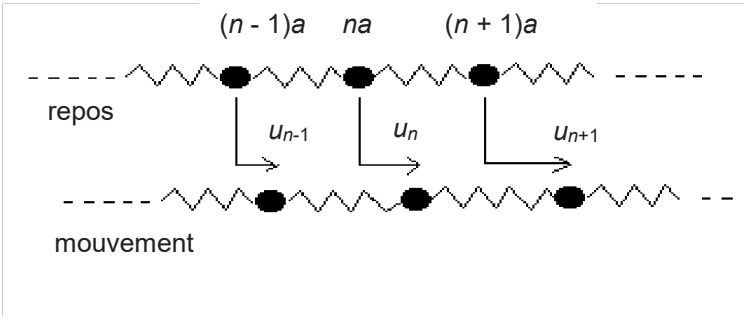


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

Q5. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la n^{ième} masse $(x_n(0))$ en fonction de *n* et de *a*. En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, *n* et de *a*.

Q6. Établir que l'équation du mouvement de la n^{ième} masse, se met sous la forme : $\ddot{u}_n = \omega_o^2\left[u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n\right]$ avec α, constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel *q* strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :
$\underline{u_n(t)} = U_o \exp\left(i\left(\omega t - qna\right)\right)$ avec $i^2 = -1$, ω et U_o strictement positifs.

Q7. Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_o et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une p^{ieme} masse (avec $p > n$) telle que : $\underline{u_p(t)} = \underline{u_n(t)}$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

Q8. Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de *a*. Que représente finalement *q* ?

Q9. Montrer que la relation de dispersion, reliant ω et *q*, est $\omega^2 = 4\omega_o^2\left(\sin\frac{qa}{2}\right)^2$.

Représenter graphiquement la fonction : $\left[q \mapsto \omega(q)\right]$ en se restreignant à l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$.

Q10. Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe v_g et de la vitesse de phase v_ϕ. Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question **Q9** ?

Q11. La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire ω pour que *q* existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.

Q12. Déterminer v_g et v_ϕ pour $q \ll \frac{\pi}{a}$ et pour $q = \frac{\pi}{a}$. On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

Le fluide (ou haki en VO) est un pouvoir mystérieux du manga, qui permet à son possesseur d'utiliser sa propre énergie spirituelle à des fins diverses, notamment pour renforcer sa peau et la rendre aussi dure qu'un diamant.

I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes.

Hypothèses du modèle :

- tous les défauts du cristal réel sont négligés ;
- l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre ;
- les vibrations d'origine thermique sont décomposables en ondes planes ;
- seules les interactions entre plus proches voisins dans une maille cristalline cubique simple sont considérées : les trois dimensions de l'espace sont découplées et l'étude sera faite sur l'une d'elles selon le modèle d'un cristal à une dimension ;
- l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse *m*, distants de *x*, sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}, \quad (A,B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

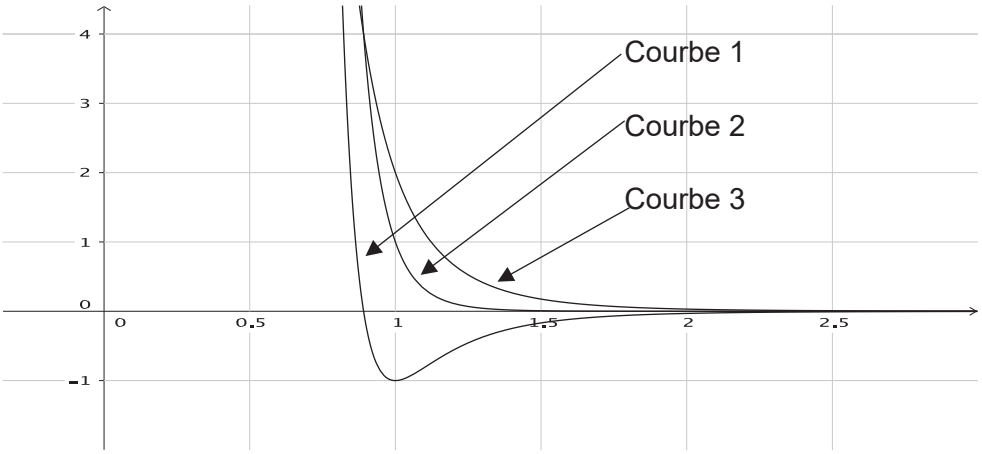
Q13. À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?

Q14. En notant *a*, la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que *V* se met sous la forme : $V(x) = \Theta_o\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^6\right]$, où la profondeur du puits de potentiel Θ_o est à exprimer en fonction de *B* et de *a*.

Q15. Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\left[\frac{x}{a}\mapsto\frac{V(x)}{\Theta_o}\right],\ \left[\frac{x}{a}\mapsto\left(\frac{a}{x}\right)^{12}\right]\ \text{et}\ \left[\frac{x}{a}\mapsto 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right].$$

Identifier ces courbes.



Q16. Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant *a*, la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur *k* que l'on exprimera en fonction de Θ_o et de *a*. On pourra développer le potentiel au seconde ordre grâce à la formule de Taylor.

Q17. Calculer *k* et ω_o pour $a = 2{,}0\cdot10^{-10}$ m, $\Theta_o = 0{,}10$ eV et $m = 1{,}0\cdot10^{-25}$ kg.

Cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides et on s'intéresse ici aux aspects énergétiques. On suppose que le mouvement des masses correspond au passage d'une onde plane harmonique de pulsation ω dont la formule est indiquée entre les questions **Q6** et **Q7**.

Q18. Exprimer la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique $\langle E_c\rangle$ d'un atome indicé par *n* en fonction de *m*, U_o et ω. En déduire l'énergie cinétique moyenne pour N atomes.

Q19. Justifier que l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p\rangle$ du n$^{\text{ième}}$ atome se met sous la forme :

$$\langle E_p\rangle = \frac{k}{4}\left(|u_{n+1}-u_n|^2 - |u_{n-1}-u_n|^2\right).$$

Q20. Grâce à la forme de l'onde et à la formule de dispersion obtenue précédemment, exprimer $< E_p >$ en fonction de *m*, U_o et de ω.

Q21. En déduire l'énergie interne du cristal en fonction de la température *T.*

I. 4 - Du discret au continu

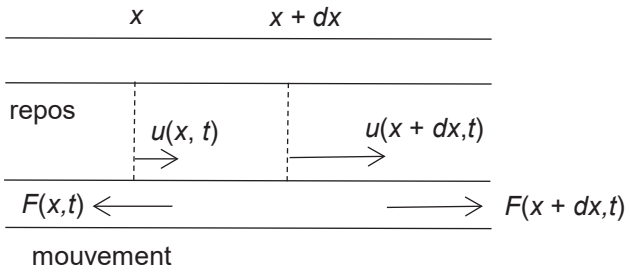


Figure 2 - Passage au continu

Q22. À partir de la relation de dispersion, exprimer la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage en fonction de ω, ω_0 et de *a*.

Calculer λ pour des fréquences ultrasonores $(f = 500\ \text{kHz})$. Commenter.

Q23. La comparaison de la longueur d'onde au paramètre *a* permet d'écrire $u_n(t) = u(x,t)$ (**figure 2**) et d'obtenir une équation de D'Alembert de la forme $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{k}{m} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$.

Calculer la célérité de l'onde dans le cristal pour des fréquences ultrasonores.

Grâce à ce corps élastique, malléable, Luffy peut étirer son bras loin derrière lui et le ramener brutalement en avant, frappant son adversaire ; l'énergie élastique emmagasinée est alors relâchée à l'impact…

PARTIE II - *Kami no Sabaki* – Électrodynamique classique



Enel (Eneru en VO) est l'antagoniste principal de l'Arc Skypiea. Son fruit du démon, le goro goro no mi, lui permet de produire de la foudre et du courant électrique en maîtrisant la formation de particules chargées….

II. 1 - Champs électromagnétiques dans un condensateur

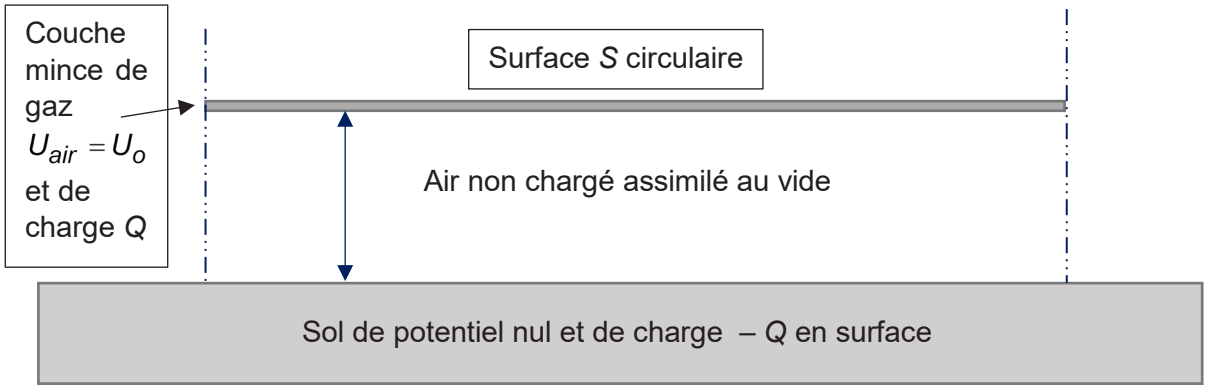


Figure 3 - Condensateur créé par Enel

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

Le pouvoir d'*Enel* lui permet d'imposer un potentiel à un volume d'air extrêmement fin au-dessus de lui. On s'intéresse ici au condensateur formé par cette surface d'air circulaire et le sol, localement plan (**figure 3**).

Dans cette modélisation, on pourra considérer deux disques (plans) parallèles de surfaces S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de potentiels électriques respectifs $U_{sol} = 0$ et U_{air} (U_{air} potentiel électrique de la couche d'air chargé). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et $\vec{u}_z$ son vecteur unitaire.

On assimile l'air non chargé entre ces plaques au vide de permittivité $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

On se place ici en régime statique, $U_{air} = U_o = \textit{constante positive}$ et on note $\sigma_{air} = \sigma_o$ la densité surfacique des charges électriques de la surface d'air chargée.

Q24. Justifier que le champ électrique est de direction Oz : $\vec{E} = E\vec{u_z}$. Exprimer ce champ électrique créé dans l'espace $0 < z < d$ en fonction de σ_o et de ε_o.

Q25. En déduire la différence de potentiel U_o en fonction de σ_o, ε_o et de d.

Q26. Calculer E et σ_o pour $d = 5{,}0\,\text{m}$ et $U_o = 1{,}0 \cdot 10^5\ \text{V}$.

Q27. Doit-on craindre une telle tension ? On donne la valeur du champ disruptif de l'air dans les conditions d'étude : $E_{disruptif}(air) = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative de basse fréquence f, de telle sorte que $U_{air} = U_o \cos(\omega t)$. On travaillera en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). On admet qu'à cette fréquence, la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique est la même qu'en régime statique.

Q28. Écrire $\vec{E}$ sous la forme $\vec{E} = E_o \cos(\omega t)\vec{u}_z$ avec E_o à préciser en fonction de U_o et des autres données de l'énoncé.

Q29. Rappeler les équations de Maxwell du champ électromagnétique.

Q30. Justifier l'existence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et montrer que $\overrightarrow{B(M,t)} = B(r,z,t)\overrightarrow{e_\theta}$.

Q31. Justifier que, si l'on reste dans l'espace entre les armatures, la circulation du champ magnétique le long d'un contour orienté s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$, avec c et $\Phi_{\vec{E}}$ à préciser.

II. 2 - Écrantage dans un plasma thermique

En fait, la création d'un tel potentiel électrique augmente drastiquement la température, ionisant au passage l'atmosphère. L'air ne sera plus assimilé à du vide mais à un plasma, un milieu globalement neutre électriquement, partiellement ou totalement ionisé, contenant en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $q_e = -e$ et $n_i = n_e$ ions X^+, de masse m_i et n_o atomes X de masse m_o.

L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à une *haute* température T.

Intéressons-nous à l'environnement d'un ion X^+ particulier dont la position sera prise pour l'origine O. Notons respectivement n_+ et n_-, les densités volumiques d'ions et d'électrons en un point M situé à une distance r de l'origine. On se place dans le cadre de l'électrostatique.

Q32. Rappeler l'énergie potentielle d'une charge e placée en un point du plasma tel que le potentiel électrique en ce point soit égal à U. On suppose que ce potentiel ne dépend que de $r : U = U(r)$.

Q33. Justifier qu'à " très haute température ", $n_+ = n_e\left(1 - \frac{eU}{k_B T}\right)$. À quelle inégalité correspond la notion de " haute température " ?

Q34. En déduire n_-.

Q35. Représenter les fonctions $\left[U \mapsto n_+(U)\right]$ et $\left[U \mapsto n_-(U)\right]$.

Q36. Comment s'écrit, dans ce milieu, l'équation de Poisson ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit $U(r)$.

Q37. En posant $Z(r) = r\,U(r)$, montrer que la fonction $Z(r)$ vérifie l'équation : $\frac{d^2Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$ avec λ_D une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

Q38. Résoudre cette équation et montrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$\text{pour } r \neq 0,\ U(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Interpréter ce que représente λ_D. Commenter.

Q39. En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ ainsi que la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre *O* et de rayon *r*.

On donne $\int_0^r r\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)dx = \left[1-\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)\left(\frac{r}{\lambda_D}+1\right)\right]$.

II. 3 - Décharge du condensateur de plasma

On (re)considère deux disques (plans) parallèles de surface *S* distants de *d* avec $d \ll \sqrt{S}$ de charges surfaciques électriques respectives $\sigma_{air} = \sigma_o$ (pour la surface d'air chargée) et $\sigma_{sol} = -\sigma_o$ (au sol). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et $\vec{u}_z$ son vecteur unitaire.

À l'instant initial $(t = 0)$, suite à l'élévation brutale de température, l'air contenu entre ces deux plans devient un conducteur ohmique, caractérisé par sa conductivité électrique γ. Cet air, entre les plaques, est supposé rester localement neutre. La relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique est supposée être la même qu'en régime statique.

Q40. Quelle est l'unité (ou la dimension) de γ ?

Q41. Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de $\sigma_{air}(t)$ et des données de l'énoncé.

Q42. Montrer que l'équation différentielle relative à la densité surfacique de charge d'air s'écrit : $\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\sigma_{air}}{\tau} = 0$, avec τ une constante de temps à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

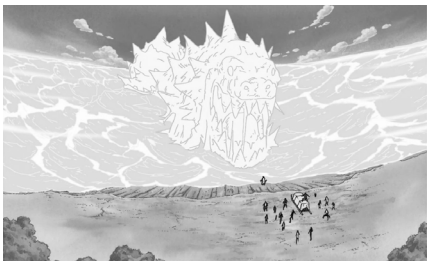
Q43. Représenter $\left[t \mapsto \sigma_{air}(t)\right]$ en faisant apparaître σ_o et τ.

Q44. Calculer le temps caractéristique de décharge τ ainsi que la densité de courant arrivant au sol à l'instant initial pour $\gamma = 1{,}0 \cdot 10^{20}$ USI et $\sigma_o = 1{,}0 \cdot 10^{8}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

Grâce au fulguro-fruit, Enel peut rendre l'air conducteur et faire propager un courant électrique d'intensité gigantesque, le rendant tout puissant face à tout élément conducteur…

PARTIE III - *Hie Hie no Mi* – Thermodynamique





Kuzan, plus connu sous le nom d'Aokiji est l'un des Trois Amiraux de la Marine. Possesseur du Hie Hie no Mi, ou Givro-Fruit en français, il peut créer, contrôler ou devenir de la glace en maîtrisant les changements d'états.

Les candidats trouveront les données numériques relatives à cette partie III dans le document : l'eau liquide et/ou solide.

Document - L'eau liquide et/ou solide

Formule chimique : H_2O	Masse molaire : $M = 18{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Conditions d'équilibre liquide-solide atmosphérique	Pression $P^0 = 1\,\text{bar}$	Température $T_f = 273{,}15\ \text{K}$
Enthalpie massique de fusion (1 bar et 273,15 K)		$L_{fus} = 333{,}3\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

	Glace	Eau liquide
Masse volumique	$990\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Capacité calorifique massique isobare	$c_{glace} = 2{,}05\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$c_{eau} = 4{,}18\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

III.1 - Machine frigorifique avec une source de température variable

Aokiji souhaite refroidir une partie de la mer et la geler ; il sera considéré ici comme une machine frigorifique ($\mathscr{S}$). Cette machine est supposée réversible, cyclique et de puissance $\mathscr{P}$ constante. Elle fonctionne, pendant un temps Δt, entre l'atmosphère qui constitue un thermostat de température θ_c constante et une masse d'eau de mer $m = 1{,}0\cdot10^3\,\text{kg}$, assimilée à de l'eau pure, de température T' qui passera de θ_c à T_f.

Les transferts thermiques et le travail seront comptés en convention récepteur : on appellera respectivement δQ_f et δQ_c les transferts thermiques reçus par ($\mathscr{S}$) de la part de la source froide et de la source chaude et δW le travail reçu par ($\mathscr{S}$) entre les instants t et $t + dt$. On suppose que la durée d'un cycle est petit devant le temps caractéristique de refroidissement de la mer qu'on assimile à de l'eau pure. La machine décrit toujours un nombre entier de cycles.

On néglige les échanges thermiques entre la masse *m* (partie de la mer " refroidie (ou gelée) ") et le reste de la mer.

Q45. Donner le schéma de principe de cette machine frigorifique, en indiquant le sens réel des transferts thermiques et du travail à un instant quelconque du fonctionnement de la machine frigorifique.

On s'intéresse au refroidissement de la mer qui reste dans son état liquide pendant toute la transformation, passant de θ_c à T_f .

Q46. En appliquant le second principe sous forme infinitésimale, écrire la relation entre $\delta Q_f, \delta Q_c, T'$ et θ_c .

Q47. En appliquant le premier principe sous forme infinitésimale, déterminer le temps nécessaire Δt pour faire passer la mer de θ_c à T_f .

Q48. Calculer la puissance minimale $\mathscr{P}_{\text{min}}$ pour que ce refroidissement dure moins que $\Delta t = 10$ min, avec $\theta_c = 293$ K .

On s'intéresse maintenant à la solidification de l'eau.

Q49. En faisant l'hypothèse que la puissance $\mathscr{P}$ reste constante et égale à $\mathscr{P}_{\text{min}}$, exprimer le temps nécessaire $\Delta t'$ pour congeler la mer.
Calculer $\Delta t'$.

Q50. Exprimer l'efficacité totale η de la machine frigorifique en fonction de $\mathscr{P}$, Δt, $\Delta t'$, T_f , m, L_{fus}, θ_c et de c_{eau} , puis la calculer.

III. 2 - Cinétique de la formation de la glace

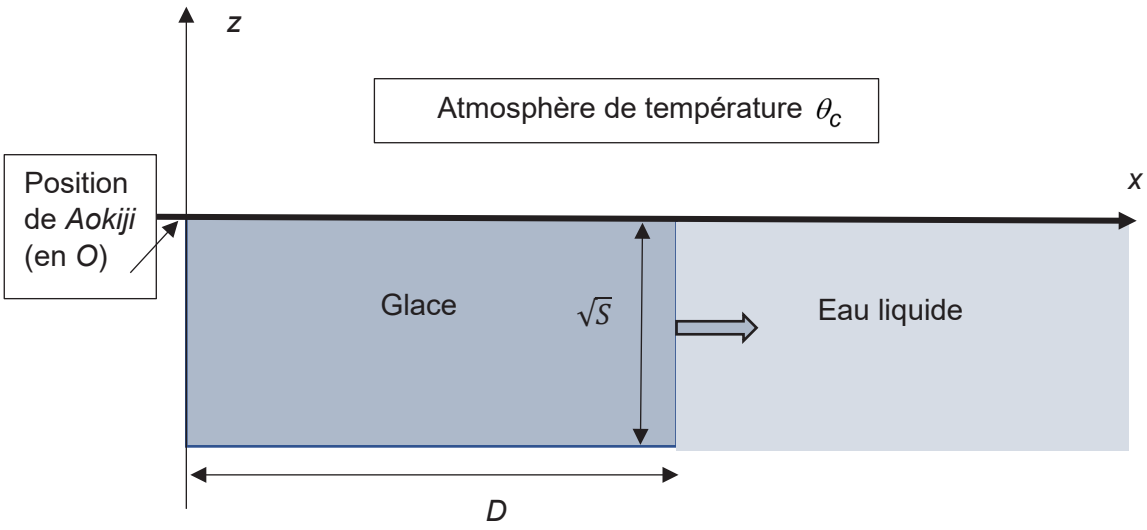


Figure 4 - " pont de glace créé par *Aokiji* "

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

On modélise ici la croissance unidimensionnelle, en régime quasi stationnaire, de la couche de glace horizontale qui se forme lentement à la surface de la mer immobile, assimilée à de l'eau pure.

On suppose que l'eau de mer est en permanence à la température de congélation T_f, l'air au-dessus de la mer est à pression constante $P_a = 1\,\text{bar}$ et à température constante $\theta_c = 293\,\text{K}$. On choisira un axe (Ox) horizontal, dont l'origine coïncide avec *Aokiji*, c'est-à-dire la machine frigorifique de puissance $\mathscr{P}'$ (puissance enlevée à la source froide qui est la glace) (**figure 4**).

La couche de glace est modélisée par un parallélépipède de section carrée, de surface droite *S* et de longueur *D* ; le système infinitésimal étudié est donc un parallélépipède à base carré de côté $\sqrt{S}$ compris entre *x* et $x + dx$.
On néglige les échanges thermiques entre la masse *m* (partie de la mer " refroidie (ou gelée) ") et le reste de la mer.

On néglige les échanges avec l'atmosphère.

Q51. On assimile le régime à un régime stationnaire. En appliquant le premier principe à un système infinitésimal de glace, écrire l'équation différentielle à laquelle obéit le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q = j_Q \vec{u}_X$ en notant σ la puissance thermique créée par unité de volume.

Q52. Vérifier que, dans notre modélisation, le vecteur densité de courant thermique est à flux conservatif.

Q53. Montrer que la vitesse de formation du front de glace v_o est constante et l'exprimer en fonction des données de l'énoncé.
Sachant que *Aokiji* est capable de créer un pont de longueur $D = 50$ km, pour une section $S = 10\ \text{cm}^2$, en une durée $\delta t = 10$ min, exprimer $\mathscr{P}'$ en fonction des données et calculer v_o.

On considère les échanges thermiques avec l'atmosphère, en régime stationnaire.
Le transfert thermique δQ à l'interface glace/air, reçu par la glace pour une surface *dS*, pendant une durée élémentaire *dt*, est donné par la relation de Newton $\delta Q = -h\left(T\left(x,t\right) - \theta_c\right) dS dt$.

Q54. Déterminer l'unité du coefficient *h*.
Pour les transferts de conducto-convection entre l'air et la glace, on supposera que le coefficient *h* de la loi de Newton vaut 42 USI.

Q55. En appliquant le premier principe au système infinitésimal, en régime stationnaire, établir la nouvelle équation liant le vecteur densité volumique de courant à la température *T*(*x*). En déduire que la nouvelle vitesse du front de glace v' peut s'écrire comme la différence de deux termes : $v' = v_o - v_a$ avec v_a vitesse qui prend en compte le caractère non calorifugé de la surface de contact glace-atmosphère. Exprimer v_a en fonction des données de l'énoncé en supposant que la situation est peu modifiée par rapport à celle où on ne tient pas compte de la loi de Newton.

Q56. Calculer l'augmentation relative de la puissance nécessaire.

Grâce au givro-fruit, Aokiji peut développer une puissance incroyable (quasiment une demi-centrale nucléaire !), lui permettant notamment de se déplacer sur la mer en la congelant…

Formulaire

Développement de Taylor

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, x_o \in I, f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, $\forall h \in \mathbb{R}, (x_o + h) \in I$,

$$f(x_o + h) = f(x_o) + h\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_o} + \frac{h^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_o} + \frac{h^3}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=x_o} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_o} + o\left(h^n\right)$$

$$f(x_o + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\left.\frac{d^kf}{dx^k}\right|_{x=x_o} + o\left(h^n\right).$$

Trigonométrie

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

Analyse vectorielle

- $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right) = \Delta$

- Coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Théorème de Stokes - Ampère

Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ de classe suffisante, le théorème de Stokes-Ampère s'écrit : $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$ avec C une courbe fermée bordant la surface à travers laquelle on calcule le flux de $\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$. L'orientation du contour C donne l'orientation du vecteur $\overrightarrow{dS}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1128 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Propagation d'un signal
- Régimes transitoires
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp