Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2025, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : graphes orientés et SQL
- Exercice 2 : polynômes de Tchebychev
- Problème, partie I : exemples de matrices de rang 1
- Problème, partie II : résultats généraux

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2025/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

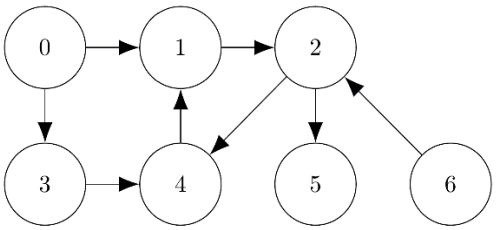
Le sujet est composé d'un exercice d'informatique du tronc commun, d'un exercice et d'un problème de mathématiques.

EXERCICE 1

Hormis **Q3** et **Q4**, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.

Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

```
d = { 0 : [1,3] , 1 :[2] , 2 :[4,5] , 3 : [4] , 4 : [1] , 5 : [], 6 : [2] }
```

Q1. Écrire en langage `Python` une fonction `degreMax( d : dict ) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si `G` est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de `G` le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de `G`.

Q2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.
Écrire en langage `Python` une fonction `grapheInv( d : dict ) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par `d`.

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste `L` telle que `L[s]` est égale à la couleur attribuée au sommet `s`.

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

Q3. Écrire en langage `Python` une fonction `colorationValide( d : dict, L : list ) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration `L` du graphe représenté par `d` est valide et `False` dans le cas contraire.

Q4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : FILMS et LOCATIONS. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :
- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :
- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

Q5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

Q6. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

EXERCICE 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n\big(cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Q10. Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$.

Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n, $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

Partie I - Exemples

On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

Q13. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$.
Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

Q14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Tr}(M)$.

Q15. Vérifier que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q16. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q17. On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q19. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Q21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Q22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Q23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Justifier que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Q24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q25. Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1042 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp