Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2025, filière MP

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude du mouvement d'un satellite
- Partie II : mesure du niveau des océans
- Partie III : voile solaire

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mp/2025/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties, toutes indépendantes.

La planète Terre

Ce sujet évoque quelques considérations relatives à l'état de notre planète (**figure 1**) et au réchauffement qu'elle est en train de subir. De nombreux dispositifs sont dédiés à la compréhension et à la surveillance du changement climatique. Certains sont envoyés en orbite autour de la Terre pour procéder à des mesures depuis l'espace. Les satellites altimétriques permettent de surveiller la montée du niveau des océans causée par la fonte des glaces et la dilatation des eaux réchauffées. La **première partie** étudie le mouvement de ces satellites. La **deuxième partie** traite du dispositif de mesure en lui-même. Enfin, on s'intéresse dans la **troisième partie** à la propulsion d'un vaisseau qui, dans le cas où le changement climatique rendrait un jour la Terre invivable, pourrait servir à transporter une partie de l'humanité vers d'autres planètes habitables.

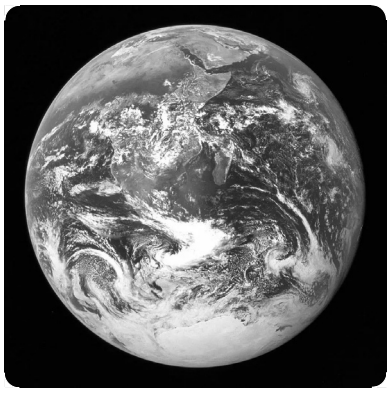


Figure 1 - Image de la Terre prise par l'équipage de la mission Apollo 17 en 1972. Crédit : NASA

À une grandeur physique évoluant sinusoïdalement avec le temps $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, on associera la grandeur complexe $\underline{f}(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$, dont la partie réelle s'identifie à la grandeur physique $f(t)$ et où i est l'unité imaginaire, nombre complexe dont le carré vaut -1.

Par commodité de représentation, les figures de l'énoncé ne respectent pas les échelles.

Certaines données sont regroupées ci-dessous. Lorsqu'une application numérique est demandée, le candidat pourra se contenter d'exprimer le résultat avec un seul chiffre significatif.

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
- charge élémentaire : $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3{,}0\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

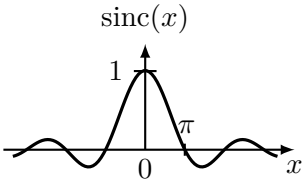
Formulaire

- Double produit vectoriel :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$$

- Sinus cardinal :

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



Partie I - Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (**figure 2**).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1)\ \mathrm{mm/an}$ durant ces trente dernières années.

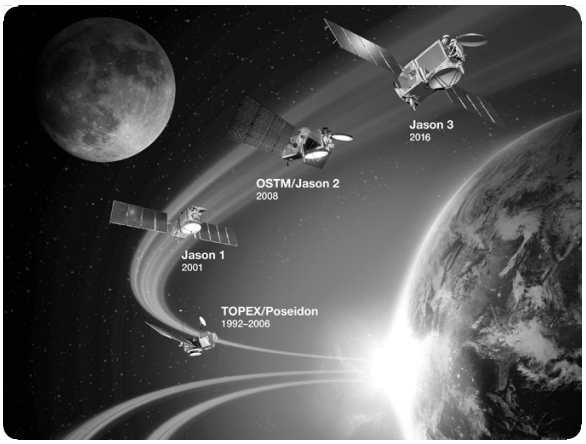


Figure 2 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T.

I.1 - Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M, dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_T)$ considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

Q1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.

Q2. Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse M_T, de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\overrightarrow{F_g}$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m.

Q3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel $(\mathcal{R}_T)$ le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de façon à ce que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ soit aligné avec $\overrightarrow{e_z}$. On posera $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = \mathcal{L}_0 \overrightarrow{e_z}$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ), de centre O, pour décrire le mouvement du mobile (**figure 3**).

Q4. Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

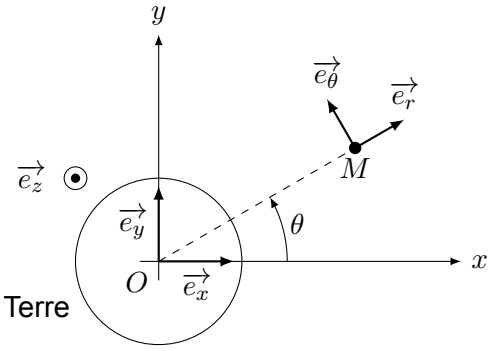


Figure 3 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

Q5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G, m, M_T, $\mathcal{L}_0$ et de r.

Q6. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Q7. Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r. Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Q8. Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R. Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m, assimilable à un point matériel.

Q9. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G, M_T, m et de R.

Q10. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

I.2 - Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 4**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périgée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

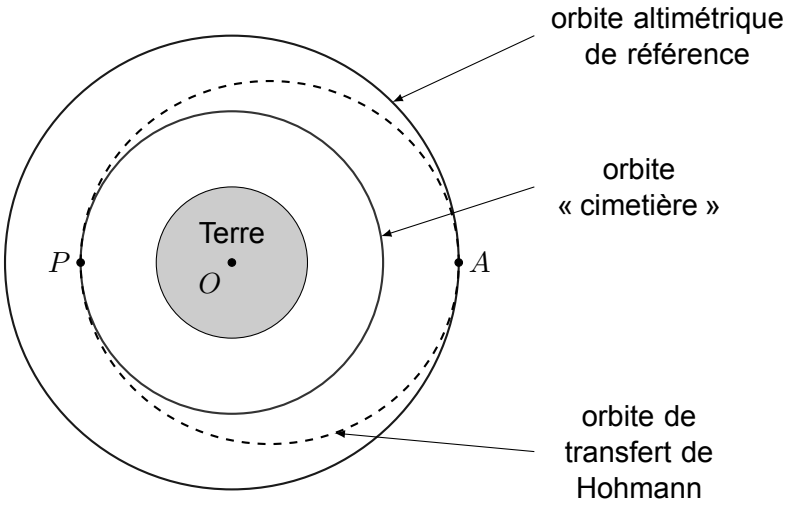


Figure 4 - Tracé des différentes orbites du satellite

Q11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

Q12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

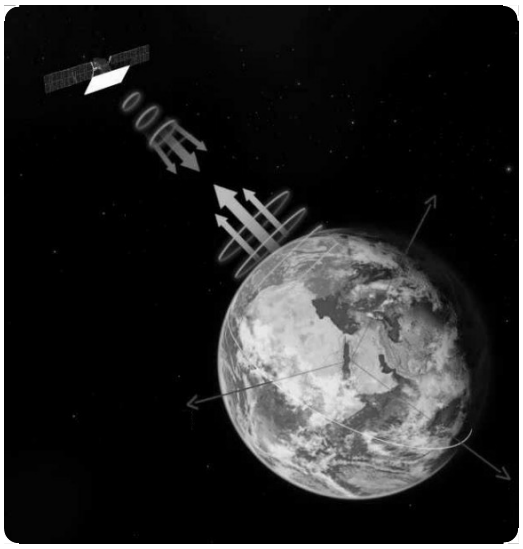
Partie II - Mesure du niveau des océans

Les altimètres radars dédiés à l'observation de la Terre utilisent des techniques radars dites actives dont le principe est illustré **figure 5** : le dispositif envoie lui-même une onde éléctromagnétique pour sonder son environnement et traite ensuite son écho pour analyser la surface ciblée.

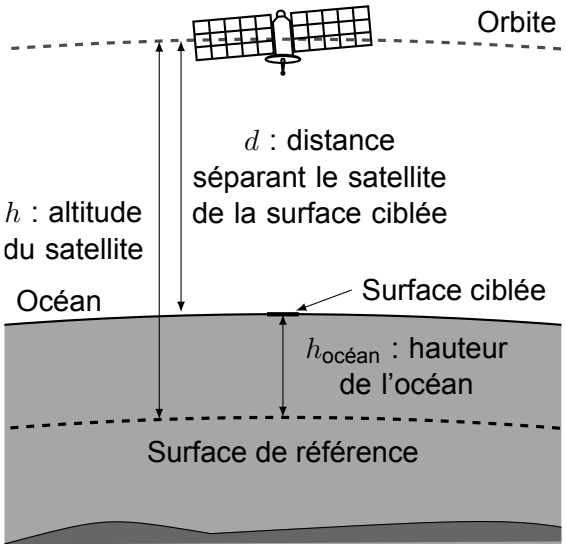
La mesure de la distance d entre le satellite et la surface ciblée permet de déterminer la hauteur du niveau des océans par rapport à une surface de référence (**figure 5b**). Cette surface correspond à une bonne approximation de la forme de la surface de la Terre. Ainsi, la hauteur du niveau de l'océan, ici notée $h_{\text{océan}}$, s'obtient en calculant la différence entre l'altitude h du satellite et la distance d séparant le satellite de la surface de l'océan :

$$h_{\text{océan}} = h - d. \tag{2}$$

L'altitude h du satellite, définie par rapport à la surface de référence, est connue grâce à un récepteur GPS avec une précision meilleure que le centimètre.



(a) Principe. Vue d'artiste. Crédit : CNES



(b) Le radar mesure la distance d le séparant de la surface ciblée

Figure 5 - Illustration du principe d'une mesure radar active

II.1 - Radar à impulsions

Le type de radar utilisé pour mesurer la distance entre le satellite et l'océan est un radar à impulsions. Son principe de fonctionnement repose sur l'envoi d'une impulsion et la détection de l'écho produit en retour par la surface ciblée. La mesure de la durée entre l'émission d'une impulsion et la réception de son écho permet de connaître la distance d séparant le satellite de la surface ciblée. On considère dans cette sous-partie que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse c dont la valeur est rappelée en début d'énoncé.

II.1.1 - Onde sinusoïdale tronquée

Considérons tout d'abord le cas simple d'une impulsion de durée τ constituée d'un signal sinusoïdal tronqué de fréquence f_0 et d'amplitude réelle A_0 (**figure 6**) :

$$e(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{avec} \qquad A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pour } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

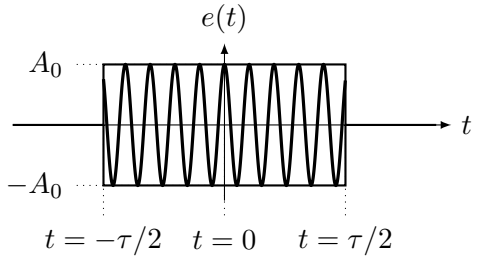


Figure 6 - Signal sinusoïdal tronqué émis par le radar sous la forme d'une impulsion de durée τ. L'échelle temporelle du signal sinusoïdal n'est pas respectée : on a en réalité $1/f_0 \ll \tau$

Comme représenté **figure 7**, le signal est amplifié avant son émission. L'écho qui revient vers le radar est une copie très atténuée du signal émis et retardée de la durée t_R de l'aller-retour. Le signal reçu est ensuite amplifié afin de pouvoir être traité. On note α le coefficient réel traduisant les différentes amplifications et atténuations des signaux. Dans la modélisation proposée, on ne tient pas compte

du bruit. Par ailleurs, on néglige la déformation des signaux due au phénomène de dispersion. Ainsi, on suppose que le signal reçu s'écrit :

$$u(t) = \alpha e(t - t_R).$$

Afin de pouvoir discriminer les différents échos provenant d'un même signal émis, on utilise un ***filtre adapté***, qui calcule l'intercorrélation du signal reçu avec une réplique du signal émis (**figure 7**). On notera $s(t)$ la sortie de ce filtre correspondant au signal $u(t)$. Sa grandeur complexe associée $\underline{s}(t)$ se calcule grâce à l'expression :

$$\underline{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{e}^*(\xi - t)\underline{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

où les grandeurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ représentent les grandeurs complexes associées respectivement aux signaux e et u et où $\underline{e}^*$ désigne la fonction complexe conjuguée de $\underline{e}$.

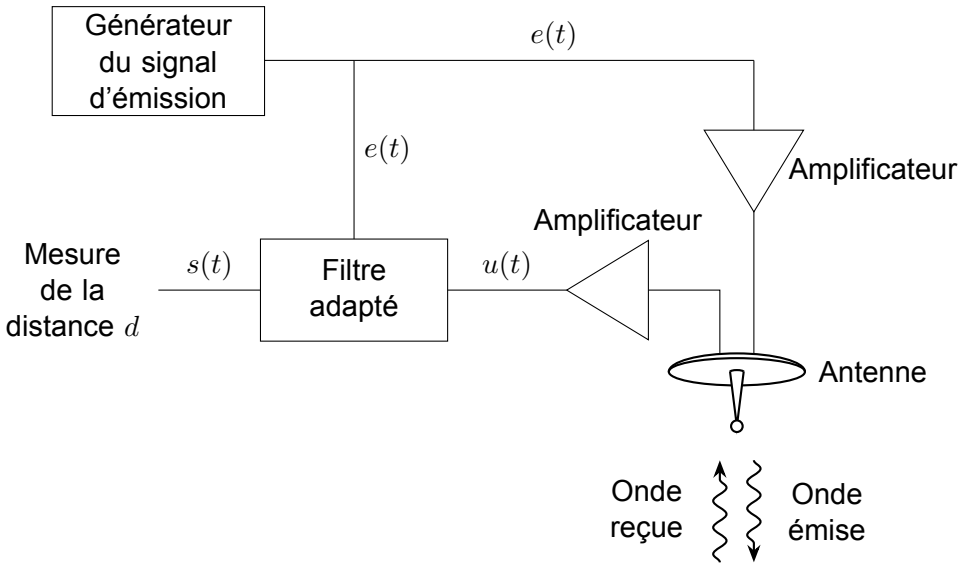


Figure 7 - Schéma simplifié de l'architecture de l'altimètre

Q14. Montrer que, pour le signal $u(t)$, la grandeur complexe $\underline{s}(t)$ associée à la sortie du filtre adapté peut se mettre sous la forme :

$$\underline{s}(t) = \alpha e^{2i\pi f_0(t-t_R)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t)A(\xi - t_R)\mathrm{d}\xi.$$

Q15. Représenter $A(\xi - t)$ et $A(\xi - t_R)$ en fonction de ξ dans le cas $t_R - \tau \leq t \leq t_R$. En déduire dans ce cas l'expression de $\underline{s}(t)$ en fonction de α, A_0, f_0, t_R, τ et de t.

En considérant les trois autres cas $t < t_R - \tau$, $t_R \leq t \leq t_R + \tau$ et $t > t_R + \tau$, on montre que la grandeur complexe $\underline{s}(t)$ peut s'écrire :

$$\underline{s}(t) = \alpha A_0^2 e^{2i\pi f_0(t-t_R)} \Lambda\left(t - t_R\right) \qquad \text{avec} \qquad \Lambda(t) = \begin{cases} t + \tau & \text{pour } -\tau \leq t \leq 0 \\ -t + \tau & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère maintenant un deuxième écho, arrivant après une durée $t'_R > t_R$, associé à la même impulsion émise mais dû à la présence d'une surface réfléchissante située à une distance $d' > d$. Les deux échos pourront être distingués l'un de l'autre si les maxima des enveloppes qui leur correspondent dans le signal en sortie du filtre adapté sont séparés d'un temps au moins égal à la durée τ d'une impulsion.

Q16. Représenter, sans souci d'échelle, les signaux réels $s(t)$ et $s'(t)$ associés aux signaux des deux échos reçus, en faisant apparaître les instants où chaque enveloppe atteint son maximum.

Q17. Pour les satellites Jason, la durée d'une impulsion est $\tau \simeq 1{,}10 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$. Déterminer numériquement le plus petit écart de distances Δd_{min} que permettrait de distinguer une impulsion telle que celle décrite par l'équation (3). Commenter.

Pour gagner en précision, une première idée pourrait être de réduire significativement la durée τ de l'impulsion. Cependant, le bruit du signal, négligé dans la modélisation proposée, serait en pratique trop grand devant le signal utile.

II.1.2 - Compression d'impulsion

On va décrire ici une méthode permettant d'envoyer une impulsion suffisamment longue afin de réceptionner un signal dont le rapport signal sur bruit est suffisant, tout en permettant de détecter de faibles variations de distances. Cette méthode, appelée *compression d'impulsion*, utilise un signal modulé en fréquence.

D'une manière générale, on peut écrire un signal modulé en fréquence sous la forme $e(t) = A\cos(\Psi(t))$ et définir sa *fréquence instantanée* $f_e(t)$ par la relation :

$$f_e(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Psi(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dans le cas du radar à impulsion étudié, la modulation en fréquence se fait suivant une rampe, représentée **figure 8**. Le signal émis peut alors s'écrire, en notant τ la durée de l'impulsion et A_0 l'amplitude réelle du signal et en introduisant une constante K :

$$e(t) = A(t)\cos\left(2\pi\left(f_0 t + \frac{K}{2}t^2\right)\right) \qquad \text{avec} \qquad A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pour } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

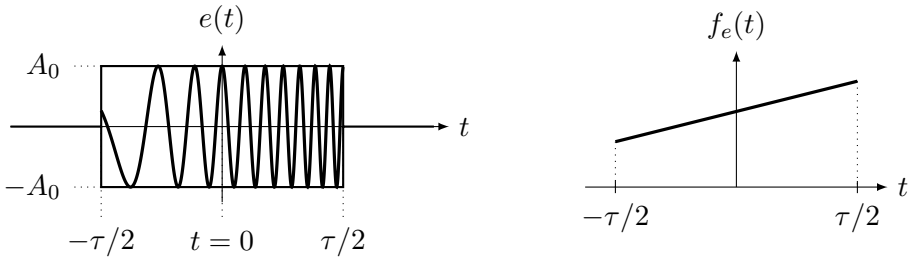


Figure 8 - Signal $e(t)$ émis par le radar. À gauche : évolution du signal en fonction du temps (échelle temporelle non respectée). À droite : tracé de la fréquence instantanée au cours du temps

Q18. Montrer que le signal décrit par l'équation (4) correspond bien à une fréquence variant linéairement avec le temps entre les instants $-\tau/2$ et $\tau/2$, en explicitant la fréquence centrale f_c et la largeur B de la bande de fréquences.

On montre que, dans le cas de ce signal, l'intercorrélation associée au signal reçu peut s'écrire approximativement :

$$\underline{s}(t) = \alpha A_0^2 \tau e^{2i\pi f_c(t-t_R)}\mathrm{sinc}\left(\pi K\tau(t-t_R)\right)$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est la fonction sinus cardinal.

On considère que deux échos peuvent être distingués l'un de l'autre si le maximum du deuxième écho est séparé du maximum du premier écho d'une durée au moins égale au temps mis par le premier écho pour atteindre sa première annulation.

Q19. Exprimer le plus petit écart Δd_{min} de distances discernables pour un tel signal en fonction de c et de B. Faire l'application numérique pour le cas des satellites Jason, sachant que la bande de fréquences utilisée dans ceux-ci est de largeur $320\,\text{MHz}$. Commenter.

II.2 - Traversée de l'ionosphère

La mesure de la distance entre le satellite et la surface des océans doit être corrigée des variations d'indice de l'ionosphère, qui joue un rôle crucial dans la transmission des ondes électromagnétiques.

L'ionosphère est la partie de l'atmosphère terrestre située entre environ $80\,\text{km}$ et $1\,000\,\text{km}$ d'altitude. Elle se caractérise par la présence d'un plasma fait de cations et d'électrons libres résultant de l'interaction entre le rayonnement solaire et les molécules de l'atmosphère. Pour simplifier, nous considérons que ce plasma est constitué d'électrons de masse m_e, de charge $-e$ et de densité particulaire n d'une part et de cations de masse m_c, de charge $+e$ et de densité particulaire n d'autre part. Jusqu'à la **question Q29** incluse, on suppose n uniforme et constante.

On s'intéresse ici à la propagation d'une onde envoyée vers la surface d'un océan depuis un satellite situé à l'altitude $h \simeq 1\,366\,\text{km}$. On définit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ dont l'origine coïncide avec le centre du satellite et dont l'axe Oz est vertical descendant. Dans l'ionosphère, on cherche l'onde électromagnétique, produite à la fois par l'émetteur du radar et par les particules chargées du plasma, sous la forme d'une pseudo onde plane progressive harmonique, décrite en un point $M(x,y,z)$ à l'instant t par le champ électrique complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - k(z-z_0))}\overrightarrow{e_x}$$

avec ω la pulsation de l'onde, E_0 l'amplitude réelle de l'onde à l'entrée dans l'ionosphère en $z = z_0$ et k le nombre d'onde, éventuellement complexe. Dans le plasma, les particules chargées ne sont soumises qu'à la force de Lorentz associée à l'onde électromagnétique. On considérera par ailleurs que la vitesse des particules ne comporte pas de partie thermique fluctuante. Enfin, on admettra que l'ordre de grandeur du rapport des amplitudes du champ magnétique et du champ électrique dans le plasma est similaire à celui dans le vide.

Q20. Identifier la direction de propagation éventuelle et la polarisation de l'onde.

Q21. Déterminer la condition pour laquelle la composante magnétique de la force de Lorentz exercée par l'onde sur les charges peut être négligée devant la composante électrique. On supposera cette condition respectée dans la suite du sujet.

Q22. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron puis à un cation, exprimer en notation complexe les vitesses $\underline{\overrightarrow{v_e}}$ et $\underline{\overrightarrow{v_c}}$ dont sont respectivement animés les électrons et les cations en régime sinusoïdal forcé, en fonction de e, ω, $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t)$ et de la masse m_e ou m_c de la particule considérée.

Q23. En utilisant le fait que la masse des cations est bien plus grande que celle des électrons, montrer à partir de la question précédente que la conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ du plasma peut s'écrire de façon approchée :

$$\underline{\gamma}(\omega) = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

où la grandeur ω_p, appelée *pulsation plasma*, est à exprimer en fonction de n, e, ε_0 et de m_e.

Q24. Le plasma est localement neutre avant le passage de l'onde. Expliquer quelle caractéristique de l'onde électromagnétique permet d'écrire que la densité volumique de charge ρ reste nulle même en présence de l'onde.

Q25. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma sous forme complexe. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \tag{5}$$

On suppose la pulsation ω telle que $\omega < \omega_p$.

Q26. Donner l'expression de k en fonction de ω, ω_p et de c, en justifiant soigneusement le choix de la solution de l'équation 5. Établir les expressions des champs réels $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$, en faisant apparaître une distance caractéristique δ dont on donnera l'expression en fonction de ω, ω_p et de c. Indiquer le nom donné à ce type d'onde.

Q27. Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

On suppose désormais la pulsation ω telle que $\omega > \omega_p$.

Q28. Établir les expressions des champs réels $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ en fonction notamment de k dont on donnera l'expression, en justifiant soigneusement le choix de la solution de l'équation 5. Préciser quelle est la nature de l'onde.

Q29. En déduire que le plasma se comporte comme un filtre pour la propagation des ondes électromagnétiques, en précisant sa nature et l'expression littérale de sa pulsation de coupure.

Q30. Le profil de la densité particulaire, qui dépend de l'alternance des jours et des nuits, est représenté **figure 9**. En déduire le domaine de fréquences que l'on doit choisir pour que l'onde puisse atteindre la surface de l'océan. Commenter le choix de la bande de fréquences utilisée par les satellites Jason, sachant que celle-ci est caractérisée par une fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 13{,}6\,\mathrm{GHz}$ et par une largeur $B = 320\,\mathrm{MHz}$.

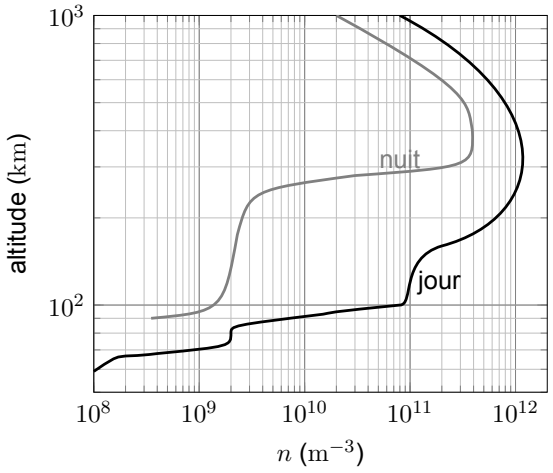


Figure 9 - Densité particulaire n de l'ionosphère en fonction de l'altitude. Crédit : J. V. Evans and T. Hagfors, *Radar Astronomy*, 1968. McGraw-Hill Education

Q31. Exprimer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g en fonction de ω, ω_p et de c. Représenter v_φ/c et v_g/c en fonction de ω.

Q32. Indiquer si l'ionosphère est dispersive pour les ondes électromagnétiques. Justifier.

Du fait de la présence de l'ionosphère, il est nécessaire d'apporter une correction au calcul de la distance entre le satellite et la surface de l'océan. Les satellites altimétriques utilisent une deuxième impulsion, de fréquence centrale $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \simeq 5{,}3\,\mathrm{GHz}$, en parallèle de la première impulsion de fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 13{,}6\,\mathrm{GHz}$. Pour la suite de l'énoncé, on considère l'ionosphère comme une couche d'épaisseur $\ell = 500\,\mathrm{km}$ et de densité d'électrons uniforme $n = 5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^{-3}$. La partie de l'atmosphère qui n'est pas l'ionosphère est assimilée au vide.

Q33. Les deux impulsions, associées aux fréquences centrales f_0 et f_1, sont émises par le satellite à l'instant $t = 0$ et leurs échos sont détectés respectivement aux instants t_0 et t_1. Déterminer une expression approchée du décalage temporel $\Delta t = t_1 - t_0$ en fonction de ℓ, c, ω_p, ω_0 et de ω_1. On pourra utiliser le développement limité en 0 : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ à l'ordre 1 en x.

Q34. En déduire que la distance d entre le satellite et la surface de l'océan peut s'écrire approximativement :

$$d \simeq \frac{ct_0}{2} - \varepsilon$$

où ε est un terme correctif, appelé *correction ionosphérique*, que l'on exprimera en fonction de c, Δt, ω_0 et de ω_1.

Q35. Déterminer, en fonction de ℓ, n, e, ε_0, m_e et de ω_0, l'erreur que l'on commettrait sur la mesure, faite à partir de l'impulsion de fréquence centrale f_0, si l'on considérait la vitesse de groupe égale à c. Faire l'application numérique et commenter la valeur obtenue.

Partie III - Voile solaire

Le changement climatique que la Terre est en train de subir risque de conduire à un déréglement irréversible de l'équilibre de vie actuel. Dans certaines œuvres de science-fiction, l'ampleur du réchauffement est telle que la seule solution pour assurer la survie de l'humanité est l'exode spatial. Un vaisseau équipé d'une voile solaire figure parmi les solutions futuristes imaginées.

Une voile solaire est un dispositif de propulsion spatiale qui utilise la pression du rayonnement solaire pour générer une force de poussée. Le procédé permettrait à un engin déjà placé en orbite de quitter l'attraction terrestre. Plusieurs prototypes de petite taille, destinés à mettre au point les systèmes de déploiement et de contrôle d'orientation particulièrement délicats, ont été placés en orbite, comme par exemple le NanoSail-D2, lancé par la NASA en 2019 et dont une vue d'artiste est représentée **figure 10**.

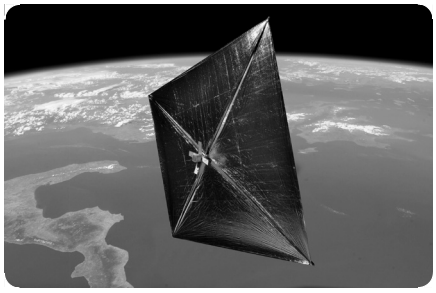


Figure 10 - Voile solaire NanoSail-D2. Vue d'artiste. Crédit : NASA

On considère une voile solaire de surface carrée $S = a^2$ modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω, de polarisation rectiligne suivant $\overrightarrow{e_z}$ et se propageant selon $\overrightarrow{e_x}$ depuis les $x < 0$. L'onde incidente, en un point $M(x, y, z)$ et à l'instant t, s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_z}$$

où $k = \| \overrightarrow{k} \| = \frac{\omega}{c}$ est la pulsation spatiale de l'onde, norme du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ et où E_0 représente l'amplitude réelle de l'onde.

On admet que les champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ associés à une onde électromagnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

III.1 - Pression de radiation

On suppose tout d'abord que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPH. Le référentiel d'étude est lié à la voile. Dans ce référentiel, la voile solaire se confond avec le plan $x = 0$, comme représenté **figure 11**.

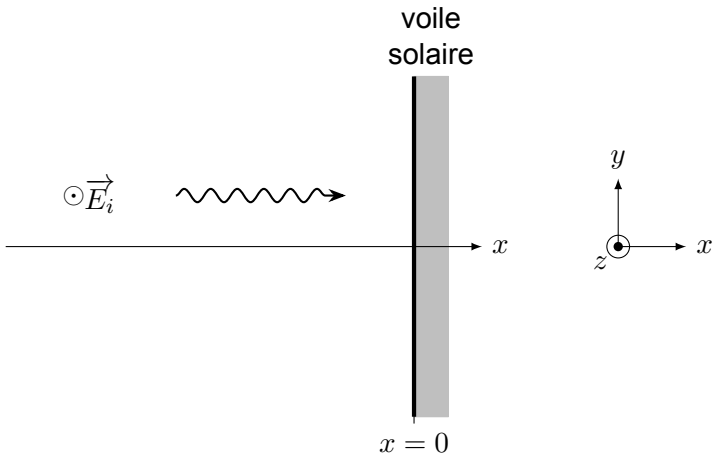


Figure 11 - Représentation de l'onde incidente arrivant en incidence normale sur la voile solaire

On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux ① et ②, de normale $\overrightarrow{n_{12}}$ orientée de ① vers ② :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{12}} \qquad\qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

où $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{B_2}$ désignent les champs électriques et magnétiques au voisinage immédiat de l'interface dans les milieux ① et ② et où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, respectivement.

Q36. La voile donne naissance à une onde réfléchie de même pulsation ω que celle de l'onde incidente. On cherche cette onde réfléchie sous la forme d'une OPPH se propageant en sens inverse de l'onde incidente et de polarisation transverse *a priori* quelconque :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}}(M,t) = \underline{E'_{0y}} e^{i(\omega t + kx)} \overrightarrow{e_y} + \underline{E'_{0z}} e^{i(\omega t + kx)} \overrightarrow{e_z}.$$

En utilisant la relation de passage relative au champ électrique, simplifier l'expression du champ électrique complexe de l'onde réfléchie.

Q37. Après avoir déterminé le champ magnétique complexe total régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$), établir l'expression de la densité surfacique de courant réelle $\overrightarrow{j_s}(t)$ qui apparaît sur celle-ci.

On s'intéresse, dans la suite, à la force électromagnétique exercée par l'onde sur la voile. On admet que cette force est égale, dans ce cas d'étude particulier, à la force de Laplace exercée sur les courants surfaciques par la moitié du champ magnétique total régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$).

On définit le scalaire j_s par la relation :

$$\overrightarrow{j_s} = j_s \overrightarrow{e_z}.$$

On considère un élément de la voile rectiligne, représenté en grisé sur la **figure 12**, de longueur a, de largeur $\mathrm{d}y$ et parcouru par un courant d'intensité $\delta i = j_s \mathrm{d}y$ orienté vers les $z > 0$.

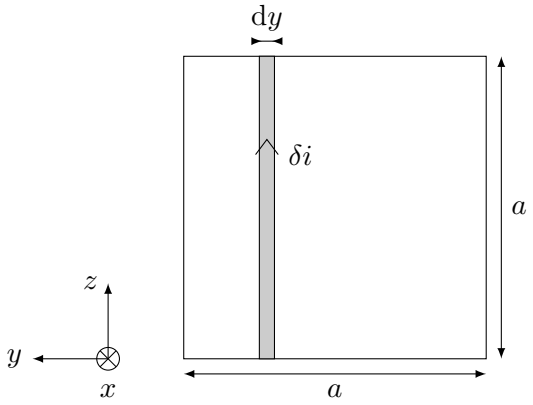


Figure 12 - Représentation d'un élément de la voile rectiligne, parcouru par un courant d'intensité δi

Q38. Exprimer la force électromagnétique $\overrightarrow{\delta F_L}$ due au champ électromagnétique sur cette portion rectiligne en fonction de a, $\mathrm{d}y$, $\overrightarrow{j_s}(t)$ et du champ magnétique incident à la surface de la voile $\overrightarrow{B_i}(x=0,t)$. En déduire la force électromagnétique totale $\overrightarrow{F_L}$ exercée sur l'ensemble de la voile en fonction de a, $\overrightarrow{j_s}(t)$ et de $\overrightarrow{B_i}(x=0,t)$.

Q39. En déduire la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\left\langle \overrightarrow{f} \right\rangle$ et montrer qu'elle peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\langle \overrightarrow{f} \right\rangle = P_m \overrightarrow{e_x}$$

où P_m est une grandeur, appelée *pression de radiation*, que l'on exprimera en fonction de l'intensité I de l'onde incidente (puissance surfacique transportée à travers une section droite, moyennée temporellement) et de la célérité c de la lumière dans le vide.

Q40. Évaluer l'ordre de grandeur de la surface S nécessaire pour donner à un vaisseau de masse $m = 2\,000\ \mathrm{kg}$ une accélération environ égale au millième de l'intensité de la pesanteur g régnant à la surface de la Terre, sachant que l'intensité du rayonnement solaire à proximité de la Terre est d'environ $1\,000\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Commenter.

Dans le cas plus général d'une inclinaison quelconque de la voile (**figure 13**), on peut montrer que la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\left\langle \overrightarrow{f} \right\rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$\left\langle \overrightarrow{f} \right\rangle = P_m \cos^2(\varphi)\, \overrightarrow{n} \qquad (6)$$

où φ est l'angle caractérisant l'inclinaison par rapport à l'axe Ox du vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ normal à la voile.

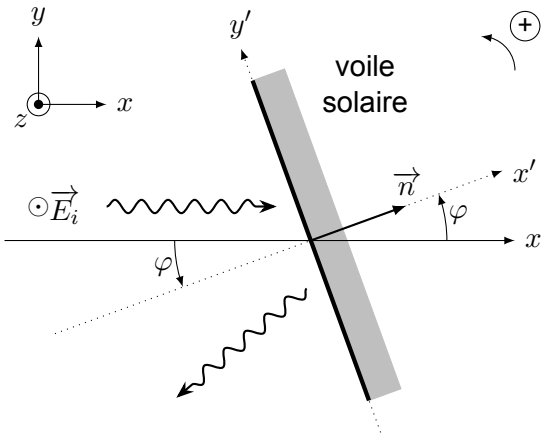


Figure 13 - Représentation de la réflexion d'une onde arrivant avec un angle d'incidence quelconque sur la voile

III.2 - Libération du vaisseau

III.2.1 - Position du problème

On va chercher dans cette sous-partie à étudier une manœuvre permettant à un vaisseau, assimilable à un point matériel M et parcourant initialement une orbite circulaire autour de la Terre, d'atteindre grâce à une voile solaire la vitesse de libération et "d'échapper ainsi à l'attraction terrestre". Pour simplifier l'étude, on considérera l'orbite initiale dans le plan de l'écliptique, qui est le plan de l'orbite du centre de la Terre autour du Soleil et que l'ensemble de la trajectoire restera contenue dans ce plan.

On décrira le mouvement dans le système de coordonnées polaires, dans le plan de l'écliptique, caractérisé par les paramètres $r = OM$ et θ, l'angle entre l'axe Ox, aligné avec la direction du rayonnement solaire et la direction radiale portée par $\overrightarrow{e_r}$ (**figure 14**). Comme l'étude du mouvement du vaisseau ne va durer que quelques jours, on peut négliger le mouvement de la Terre autour du Soleil et considérer le référentiel géocentrique d'étude comme galiléen.

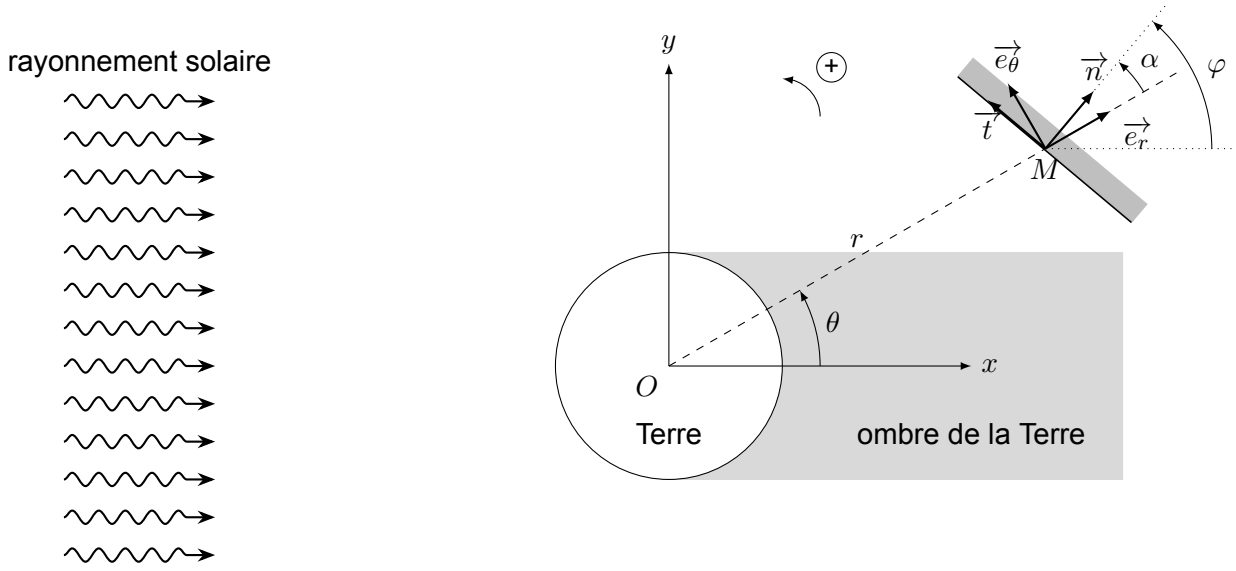


Figure 14 - L'orientation de la voile est repérée par l'angle α que fait le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ normal à la voile avec la direction radiale. Le vecteur $\overrightarrow{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la voile tel que $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{e_z})$ forme un trièdre direct droit

Grâce à la présence de sa voile, le vaisseau va subir la force $\overrightarrow{F_p}$ de pression de radiation exercée par le rayonnement solaire dont la valeur surfacique a été décrite à la sous-partie **III.1**. En raison du passage du vaisseau dans l'ombre de la Terre, on introduit une fonction $L(r,\theta)$ qui rend compte de la présence ou non du rayonnement solaire sur la voile :

$$\overrightarrow{F_p} = L(r,\theta)\left\langle \overrightarrow{f} \right\rangle S = L(r,\theta) P_m S \cos^2(\varphi)\, \overrightarrow{n} \quad \text{avec} \quad L(r,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \text{ est dans l'ombre de la Terre} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où l'angle φ sera à tout instant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Q41. Donner les expressions en coordonnées polaires du vecteur position $\overrightarrow{r}$, du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ du point matériel M qui modélise le vaisseau.

Q42. En considérant la Terre comme un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, déterminer les composantes radiale F_r et orthoradiale F_θ de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur le vaisseau en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse M_T de la Terre, de la masse m du vaisseau, de la fonction $L(r,\theta)$ et des grandeurs r, θ, P_m, S et φ.

On note dans la suite v_r et v_θ les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = v_r \overrightarrow{e_r} + v_\theta \overrightarrow{e_\theta}.$$

Q43. Montrer que les dérivées temporelles $\dot{v}_r$ et $\dot{v}_\theta$ peuvent s'écrire :

$$\dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r} \qquad \text{et} \qquad \dot{v}_\theta = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}.$$

III.2.2 - Énergie et manœuvre optimale

On cherche à optimiser la manœuvre du vaisseau en ajustant l'orientation de la voile pour que la force de pression de radiation permette à chaque instant d'augmenter le plus possible l'énergie mécanique du vaisseau.

Q44. Donner l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du vaisseau en fonction de G, M_T, m, r, v_r et de v_θ.

Q45. Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = K_m L(r,\theta)\cos^2(\varphi)\left(v_r\cos(\varphi-\theta)+v_\theta\sin(\varphi-\theta)\right)$$

où K_m est une constante que l'on exprimera en fonction de P_m et de S.

III.3 - Simulation numérique du mouvement du vaisseau

Seul le langage Python est autorisé dans cette sous-partie de simulation numérique. On suppose que le module `numpy` a été importé grâce à l'instruction :

```
import numpy as np
```

Le candidat pourra à tout moment supposer qu'une fonction ou une instruction définie dans une question précédente est disponible, même s'il n'a pas traité la question correspondante. Une documentation relative au module numpy est fournie en annexe à la fin du sujet.

Dans l'énoncé, une même grandeur peut être écrite suivant le contexte dans deux polices de caractères différentes : une police en italique pour représenter une grandeur physique ou mathématique (par exemple : $\mathrm{d}t$) et une police de type machine pour définir son équivalent dans le code informatique (par exemple : `dt`).

Pour la résolution numérique, on définit de manière globale en début de programme les variables répertoriées dans le **tableau 1**. Elles pourront être utilisées directement dans la suite.

instruction	grandeur correspondante
`G = 6.67e-11 # en N.m2/kg2`	G : constante de la gravitation universelle
`MT = 5.98e24 # en kg`	M_T : masse de la Terre
`RT = 6.37e6 # en m`	R_T : rayon de la Terre supposée sphérique
`m = 2.0e3 # en kg`	m : masse du vaisseau
`g = 9.8 # en N/kg`	g : intensité de la pesanteur à la surface de la Terre
`Km = g/1000*m`	K_m : constante apparaissant dans la **question Q45**

Tableau 1 - Variables définies de manière globale en début de programme

III.3.1 - Résolution numérique

On propose la fonction suivante, incomplète :

```
1  def simulation(r, theta , vr, vtheta , tmax, dt) :
2      """ Calcule itérativement, par la méthode d'Euler explicite, la position
           et la vitesse du vaisseau ainsi que l'orientation de la voile réglée
           de manière optimale au cours du temps.
3      Entrées :
4          - r (float) : distance initiale entre le vaisseau et le centre de la
               Terre (en m) ;
5          - theta (float) : angle polaire initial (en radians) ;
6          - vr (float) : vitesse radiale initale (en m/s) ;
7          - vtheta (float) : vitesse orthoradiale initiale (en m/s) ;
8          - tmax (float) : durée de la simulation (en s) ;
9          - dt (float) : pas temporel de la simulation (en s).
10     Sortie :
11         - R ([float]) : liste de la distance entre le centre de la Terre et
               le vaisseau aux différentes instants (en m) ;
12         - Theta ([float]) : liste de l'angle polaire aux différents instants
               (en radians) ;
13         - Vr ([float]) : liste de la vitesse radiale aux différents instants
               (en m/s) ;
14         - Vtheta ([float]) : liste de la vitesse orthoradiale aux différents
               instants (en m/s) ;
15         - Phi ([float]) : liste de l'angle phi optimal aux différents
               instants (en radians).
16     """
17     instruction 1
18     R, Theta, Vr, Vtheta, Phi = [], [], [], [], []
19     for t in T :
20         phi = recherche_phi_optimal(vr, vth, theta)
21         vr_pt, vth_pt = derivees_comp_vitesse(r, theta, vr, vth, phi)
22         instruction 2
23         R.append(r)
24         Theta.append(theta)
25         Vr.append(vr)
26         Vth.append(vth)
27         Phi.append(phi)
28     return T, R, Theta, Vr, Vth, Phi
```

Q46. À la ligne 17, proposer une instruction à la place de `instruction 1` permettant de définir le tableau numpy `T` contenant n valeurs de t, séparées par le pas de temps constant `dt` et comprises entre 0 (inclus) et `tmax` (exclu).

Q47. Pour une vitesse et une position du vaisseau données, il existe un unique angle φ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ permettant de maximiser le taux de variation temporelle de l'énergie mécanique, comme décrit dans la sous-partie **III.2.2**. Écrire la fonction `recherche_phi_optimal(vr, vth, theta)` permettant, pour une vitesse radiale v_r, une vitesse orthoradiale v_θ et un angle polaire θ, de déterminer cet angle φ optimal à $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}$ près. On pourra se contenter d'un algorithme naïf de recherche d'un maximum, fonctionnant avec une complexité temporelle linéaire.

Q48. Écrire une fonction `derivees_comp_vitesse(r, theta, vr, vth, phi)`, permettant, à partir des paramètres r, θ, v_r, v_θ et φ, de calculer les dérivées temporelles $\dot{v}_r$ et $\dot{v}_\theta$ des composantes radiale et orthoradiale de la vitesse, suivant les résultats obtenus aux **questions Q42** et **Q43**. Il est demandé de tenir compte des passages du vaisseau dans l'ombre de la Terre.

Q49. À la ligne 22, remplacer `instruction 2` par une instruction (ou un bloc d'instructions) permettant d'écraser les valeurs $r(t)$, $\theta(t)$, $v_r(t)$ et $v_\theta(t)$ des variables `r`, `th`, `vr` et `vth`, par les valeurs de ces mêmes paramètres à l'instant $t+\mathrm{d}t$: $r(t+\mathrm{d}t)$, $\theta(t+\mathrm{d}t)$, $v_r(t+\mathrm{d}t)$ et $v_\theta(t+\mathrm{d}t)$, en appliquant une itération de la méthode d'Euler explicite.

III.3.2 - Exploitation de la simulation

On souhaite lancer la simulation avec les paramètres suivants :

- durée totale de la simulation : $t_{\text{max}} = 7\,\text{jours}$;
- pas temporel : $\mathrm{d}t = 1\,\text{s}$;
- orbite initiale circulaire de rayon $r_0 = 30\,000\,\text{km}$;
- angle polaire initial $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$.

On procède à la simulation grâce aux instructions suivantes :

```
tmax = 24*3600*7 # en s
dt = 1 # en s
vr = 0 # en m/s
r = 30000e3 # en m
vth = np.sqrt(G*MT/r)
theta = -np.pi/2
T, R, Theta, Vr, Vth, Phi = simulation(r, theta, vr, vth, tmax, dt)
```

On exploite ensuite les listes `R`, `Theta` et `Phi` pour représenter la trajectoire, telle qu'elle apparaît sur la **figure 15**. On constate que, compte tenu du rayon de l'orbite initiale, la zone d'ombre n'influence quasiment pas le mouvement du vaisseau.

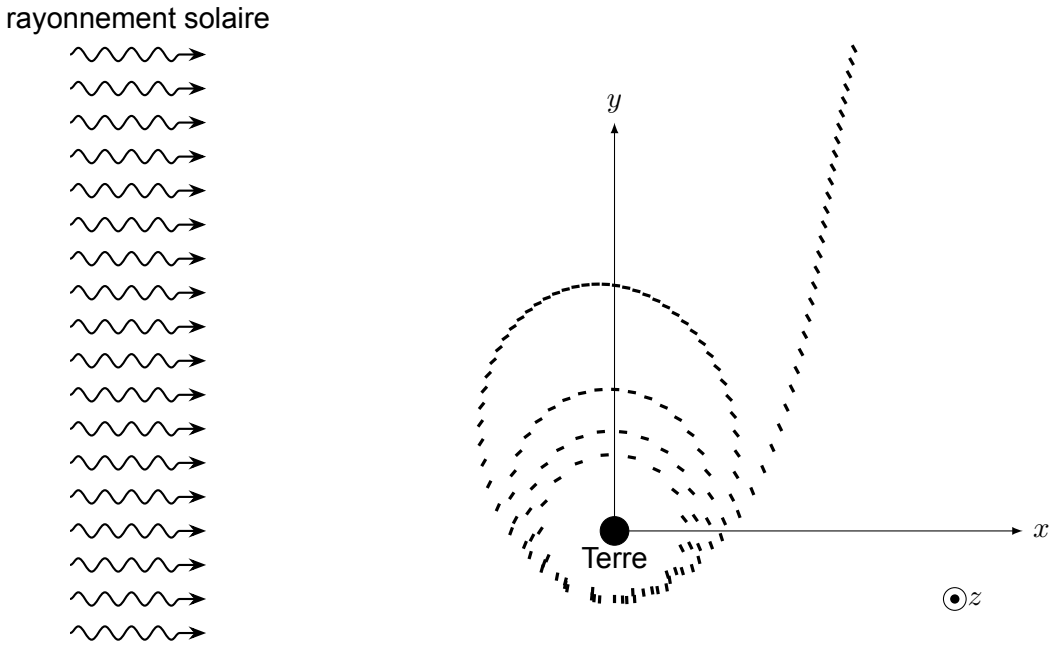


Figure 15 - Résultat de la simulation. Chaque position du vaisseau est séparée de la précédente par une durée d'une heure. Le vaisseau est représenté par un trait qui précise l'orientation du plan de la voile

Q50. Expliquer physiquement la raison pour laquelle il faut que le plan de la voile soit approximativement parallèle au plan xOz de la **figure 15** lorsque le vaisseau est aux environs des points repérés par les coordonnées $x \simeq 0$ et $y > 0$.

Pour suivre l'état du vaisseau dans le champ de gravitation terrestre, il peut être intéressant de tracer, en fonction du temps, le rapport de la norme $\|\overrightarrow{v}\|$ de la vitesse sur la vitesse de libération v_{lib} du satellite. On rappelle que la vitesse de libération $v_{\text{lib}}(r)$ associée à un astre considéré comme seul attracteur est la vitesse minimale permettant à un corps, situé à la distance r du centre de cet astre, de s'en éloigner définitivement. Le résultat est représenté **figure 16**.

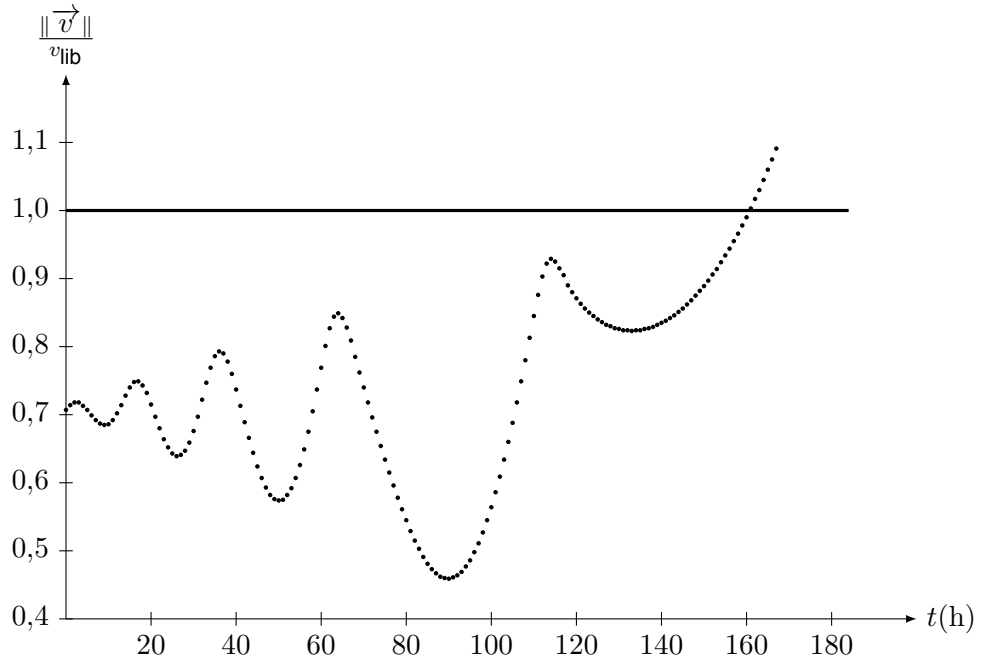


Figure 16 - Évolution du rapport $\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{v_{\text{lib}}}$ en fonction du temps

Q51. Déduire de l'application d'un théorème énergétique l'expression de la vitesse de libération $v_{\text{lib}}(r)$ d'un corps soumis à l'attraction terrestre.

Q52. Donner, pour une masse m évoluant sans voile solaire autour de la Terre suivant une trajectoire elliptique d'énergie $\mathcal{E}_m = \text{cte}$, l'expression du rapport $\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{v_{\text{lib}}}$ en fonction de $\mathcal{E}_m$, m, G, M_T et de r. Expliquer les oscillations de la courbe de la **figure 16**. Expliquer pourquoi l'amplitude des premières oscillations augmente au cours du temps.

Annexe - Aide relative à l'utilisation du module numpy

– `np.array(u)` crée un tableau numpy (N-dimensional array) contenant les éléments de la liste `u`. La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de `u` :

```
>>> u = [1, 2, 3]
>>> np.array(u)
array([1, 2, 3])
```

– `np.arange(a,b,p)` crée un tableau numpy de flottants contenant les valeurs comprises entre a (inclus) et b (exclu), régulièrement espacées du pas p :

```
>>> np.arange(0.5, 1.6, 0.1)
array([0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1. , 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5])
```

– `np.linspace(a,b,n)` crée un tableau numpy de flottants contenant n valeurs régulièrement espacées et comprises entre a (inclus) et b (inclus) :

```
>>> np.linspace(0.5, 1.5, 11)
array([0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1. , 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5])
```

– `np.sqrt(x)` calcule la racine carrée du nombre x ;

– `np.cos(x)` et `np.sin(x)` renvoient le cosinus et le sinus de l'angle x exprimé en radians ;

– `np.arccos(x)` et `np.arcsin(x)` renvoient l'arc cosinus et l'arc sinus du réel x compris entre -1 et 1 ;

– Les opérations élémentaires (`*`, `+`, `/`, `-`, `%`, etc) et les fonctions de calcul du module numpy, telles que `cos` ou `sqrt` par exemple, peuvent s'appliquer sur des tableaux numpy. Le résultat renvoyé est un tableau de même dimension que le tableau utilisé :

```
>>> 100+2*np.array([18,6,40])
array([136, 112, 180])
>>> np.cos(np.array([0,np.pi/2,np.pi]))
array([ 1.000000e+00,  6.123234e-17, -1.000000e+00])
```

– Il est possible de manipuler membre à membre plusieurs tableaux numpy de même dimension :

```
>>> np.array([1,2,3])+np.array([10,20,30])
array([11, 22, 33])
```

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1044 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Propagation d'un signal
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mp