Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2024, filière MPI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : diagonalisation et suites récurrentes
- Exercice 2 : une série de fonctions
- Problème : caractérisation spectrale et critère en dimension 2
- Problème : le critère de Sylvester

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mpi/2024/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE 1

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ de la variable réelle et on note f sa somme.

Q3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

Q4. Démontrer que f est continue sur D.

Q5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Q6. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Q7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul *n*, une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\quad X^{\mathsf{T}} MX > 0\,.$$

Q8. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q10. Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q11. Démontrer qu'une matrice définie positive *M* de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q13. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q14. Application : Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.
Pour une matrice carrée quelconque $M=\left(m_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ et un entier $k\in[\![1,n]\!]$, on définit *le k-ième mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k=\left(m_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,k]\!]}\in\mathcal{M}_k\left(\mathbb{R}\right)$. On précise qu'une matrice carrée de taille *n* possède *n* mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ de la **question Q10.** sont les déterminants des matrices $B_1=(1)$, $B_2\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ et $B_3=B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice *B* de la **question Q10.**, on constate que :

$$\det\left(B_1\right)=1>0,\quad \det\left(B_2\right)=2>0\quad\text{et}\quad \det\left(B_3\right)=3>0.$$

La matrice *B* vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q15. On fixe une matrice $M\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, un entier $k\in[\![1,n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{k,1}\left(\mathbb{R}\right)$. Déterminer un vecteur colonne $X\in\mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{0\}$, tel que :

$$X_k^{\mathsf{T}}M_k\,X_k=X^{\mathsf{T}}MX\,.$$

Q16. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille *n* de la matrice.

Q17. Soit $n\geq 2$ et soit une matrice symétrique $M\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $\det\left(M\right)>0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M=\begin{pmatrix}M_{n-1}&U\\U^{\mathsf{T}}&\alpha\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad M_{n-1}\in\mathcal{M}_{n-1}\left(\mathbb{R}\right),\quad U\in\mathcal{M}_{n-1,1}\left(\mathbb{R}\right)\quad\text{et}\quad\alpha\in\mathbb{R}\,.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V\in\mathcal{M}_{n-1,1}\left(\mathbb{R}\right)$ tel que $M_{n-1}V+U=0$.

En notant $Q=\begin{pmatrix}I_{n-1}&V\\0_{1,n-1}&1\end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^{\mathsf{T}}MQ$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix}M_{n-1}&0_{n-1,1}\\0_{1,n-1}&\beta\end{pmatrix}$ avec $\beta>0$.

Q18. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q20. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q21. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0 .$$

Q22. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1123 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mpi