Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2026, filière MPI

Physique-chimie

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : champ gravitationnel et champ de pesanteur
- Partie II : forme de la Terre
- Partie III : détermination optique du champ de pesanteur
- Partie IV.1 : obtention d'un ciment
- Partie IV.2 : les pluies acides
- Partie V : propriétés thermodynamiques de la Terre
- Partie VI : bilan énergétique au sol
- Partie VII : le champ magnétique terrestre

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/mpi/2026/physique-chimie

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

PHYSIQUE - CHIMIE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de sept parties indépendantes.

Notre Terre : attractive, si chaleureuse et… magn(if)(ét)ique

La vie sur notre planète Terre est tributaire de certaines de ses caractéristiques comme sa température et d'autres paramètres climatiques, son champ de pesanteur, son champ magnétique, etc. En particulier, le champ de pesanteur intervient dans tous les mouvements au voisinage de la Terre. Par ailleurs, les ressources terrestres en eau, pétrole, minerais et matériaux de construction assurent notre existence dans de bonnes conditions.

Ce sujet s'intéresse à quelques caractéristiques physiques et chimiques de la Terre. Il est composé de sept parties indépendantes.

La **partie I** s'intéresse au champ de pesanteur terrestre (analogie avec l'électromagnétisme).
La **partie II** s'intéresse à l'énergie potentielle de pesanteur (mécanique).
La **partie III** s'intéresse à une mesure optique du champ de pesanteur (optique interférentielle).
La **partie IV** fait appel à la chimie et est constituée de sous-parties indépendantes : la **partie IV-1** étudie la composition du ciment et la **partie IV-2** fait appel aux propriétés des couples acidobasiques.
La **partie V** modélise la température au sein de la Terre (thermodynamique).
La **partie VI** modélise un bilan énergétique de la surface de la Terre.
La **partie VII** étudie le champ magnétique terrestre.

En coordonnées sphériques (r,θ,φ) et avec la base sphérique $\left\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right\}$, un point *M* est repéré par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ dans un référentiel d'origine *O*.

Pour une fonction $f(r)$, l'expression de l'opérateur gradient est $\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = \dfrac{df}{dr}\overrightarrow{u_r}$.

Données utiles pour l'ensemble du sujet	
Rayon de la Terre supposée sphérique	$R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m
Masse de la Terre	$M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg
Constante d'attraction universelle	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe sud-nord	$\Omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
Capacité calorifique massique de la Terre	$C \approx 10^3\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$

Les résultats numériques peuvent être donnés avec un seul chiffre significatif. Pour faire du calcul approché, on pourra utiliser la courbe log10(x) donnée en annexe, ainsi que les valeurs des log10 pour les données ci-dessus.

Partie I - Champ gravitationnel et champ de pesanteur

Q1. Donner les expressions des champs gravitationnel $\overrightarrow{G(M)}$ et électrostatique $\overrightarrow{E(M)}$, créés en un point *M*, respectivement par la masse ponctuelle m et par la charge ponctuelle q, chacune étant placée en *O*. En déduire les analogues gravitationnels de la charge q et de la permittivité diélectrique du vide ε_0. En utilisant l'analogie, écrire l'énoncé du théorème de Gauss intégral relatif au champ gravitationnel $\overrightarrow{G(M)}$ créé par une distribution volumique de masse $\mu(P)$ contenue dans un volume V délimité par une surface S.

On suppose que la Terre est une sphère homogène de centre *O*, de rayon R_T et de masse volumique uniforme $\mu_T = 5\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q2. Exprimer le champ gravitationnel $\overrightarrow{G_T(M)}$ créé par la Terre en tout point de l'espace.

Les variations du champ gravitationnel au voisinage du sol terrestre peuvent renseigner sur le contenu du sol. On s'intéresse à la modification du champ gravitationnel terrestre due à un gisement de pétrole, modélisé comme une sphère homogène de rayon r', de centre *C* et de masse volumique égale à $\mu_p = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On cherche la variation relative du champ gravitationnel introduite par le gisement de pétrole en un point *M* situé sur la verticale *OCZ* du point *C,* à la surface de la Terre, avec la distance *CM* égale à *CM* = *d* (**figure 1**).

On note $\overrightarrow{G_T(M)} = G_T(M)\overrightarrow{u_z}$ le champ gravitationnel qui règnerait sur la Terre sans la poche de pétrole et $\overrightarrow{G_{Tp}(M)} = G_{Tp}(M)\overrightarrow{u_z}$ en présence de la poche de pétrole.

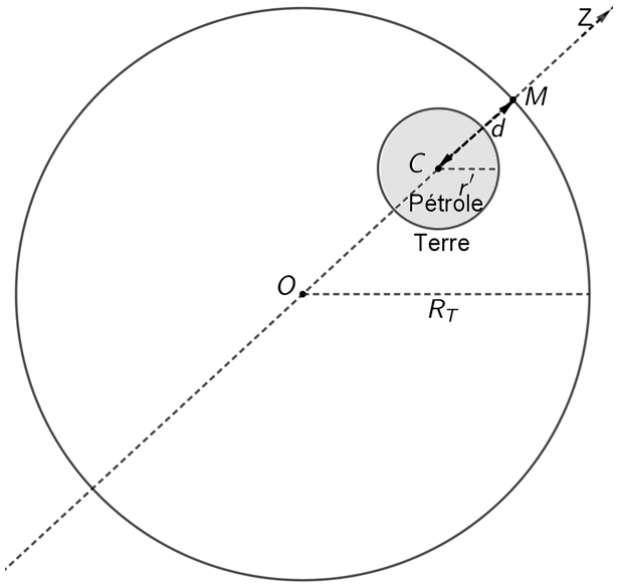


Figure 1 - Présence de pétrole dans le sol terrestre

Q3. En utilisant le principe de superposition, exprimer $G_{Tp}(M)\overrightarrow{u_z}$ et la variation relative du champ gravitationnel $\varepsilon = \dfrac{G_T(M) - G_{Tp}(M)}{G_T(M)}$ en fonction de μ_T, μ_P, r', d et de R_T. En présence de pétrole, indiquer avec justification si le champ gravitationnel devient plus intense ou moins intense.

Faire une estimation numérique de ε, en prenant : $\frac{r'}{d}=\frac{1}{2}$, $\frac{r'}{R_T}=\frac{10^{-3}}{4}$ et $\frac{\mu_P}{\mu_T}=\frac{1}{6}$.
Commenter sachant que les gravimètres actuels ont une précision relative de l'ordre de 10^{-8}.

Partie II - Forme de la Terre

L'étude de certains mouvements peut se faire dans le référentiel géocentrique *R*(OXYZ) (**figure 2**), qui est supposé galiléen et dont l'origine est O, le centre de la Terre.
Le référentiel terrestre $R'(O'X'Y'Z')$ (**figure 2**), lié à la Terre, effectue un mouvement de rotation uniforme, de vecteur $\vec{\Omega}(R'/R)=\Omega\vec{u_z}$ par rapport au référentiel géocentrique où $\vec{u_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe OZ.

Un point matériel M, de masse *m*, situé à la distance *r* = OM du centre de la Terre est soumis à l'attraction gravitationnelle et à d'autres forces. Le poids du mobile $m\vec{g}$ est défini par $\vec{P}=m\overrightarrow{g(M)}=m\left(-GM_T\frac{\vec{u_r}}{r^2}+\Omega^2\overrightarrow{HM}\right)$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.

Q4. Justifier l'expression du champ de pesanteur $\overrightarrow{g(M)}$ donnée ci-dessus en précisant quel est le terme gravitationnel et quel est le terme d'inertie. Donner l'ordre de grandeur de sa norme à la surface de la Terre.

Q5. En général, la force de Coriolis peut être négligée devant le poids. Justifier cette approximation en prenant l'exemple d'un train TGV roulant à 360 km/heure, c'est-à-dire 100 m/s.

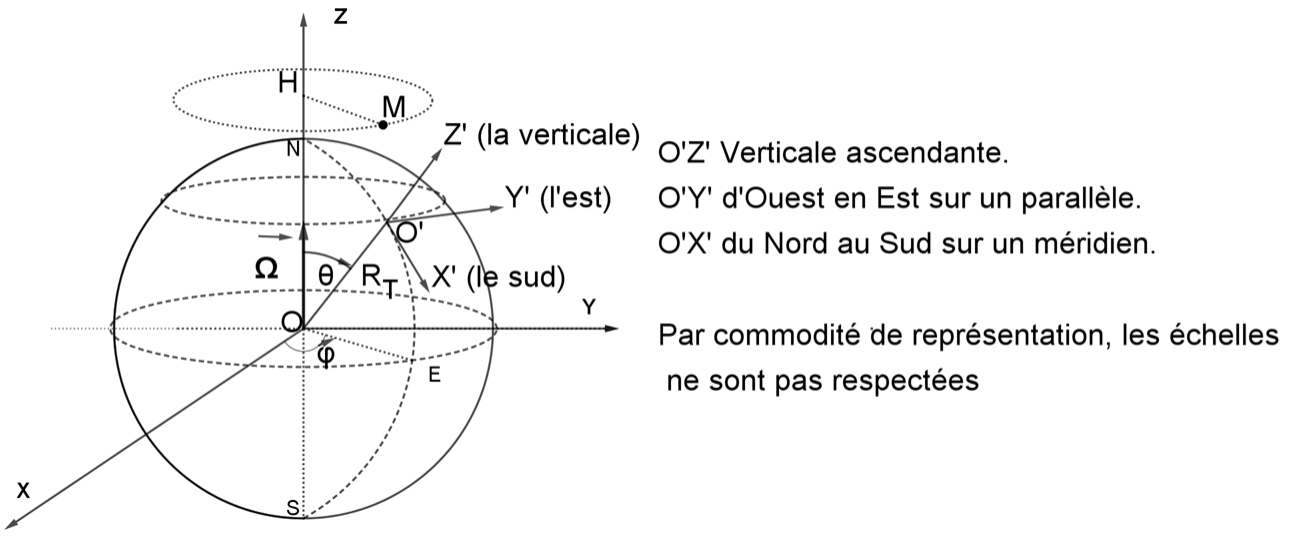


Figure 2 - Référentiel géocentrique et référentiel terrestre

Q6. Montrer que le rapport des normes du terme d'inertie d'entraînement et du terme de gravitation à la surface de la Terre est majoré par une valeur η qu'on exprimera en fonction de Ω, R_T, G et de M_T. Déterminer l'ordre de grandeur de la quantité η et commenter.

Q7. **a)** La force gravitationnelle $\overrightarrow{F_G}(\mathrm{M})$ dérive de l'énergie potentielle de gravitation $E_{pG}(\mathrm{M})$. Donner l'expression de celle-ci pour une masse *m* dans le champ de la Terre, en prenant une valeur nulle à l'infini.

b) La force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_e}$ dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement $E_{pe}(\mathrm{M})$. Établir que celle-ci s'écrit $E_{pe}(\mathrm{M}) = -\frac{1}{2} m\Omega^2 \left(\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right)^2$ pour une masse *m* dans le champ de la Terre, en prenant une valeur nulle en r = 0.

c) En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(\mathrm{M})$ en coordonnées sphériques.

On appelle surface équipotentielle le lieu des points de même énergie potentielle de pesanteur et on se propose d'étudier la forme de l'équipotentielle (Σ) de valeur constante $E_{pp}(\mathrm{M} \in \Sigma) = E_{pp}(N)$ où N est le pôle Nord de la Terre repéré par $\mathrm{ON} = r_n$.

Q8. Montrer que, dans un plan méridien, la trace de cette surface équipotentielle (Σ) peut être décrite par la forme approchée $r(\theta) \approx r_n\left(1 + \varepsilon \sin^2\theta\right)$ et exprimer la constante ε en fonction de R_T, r_n et de η. Dessiner l'allure de $r(\theta)$ et exprimer le paramètre d'aplatissement $\varepsilon' = \frac{r_e - r_n}{r_n}$ sachant que *r* vaut r_e dans tout le plan équatorial.

Partie III - Détermination optique du champ de pesanteur

On se propose de mesurer la norme g du vecteur champ de pesanteur terrestre supposé uniforme, en utilisant une méthode optique basée sur l'interféromètre de Mach-Zehnder, dont le schéma de principe est représenté en **figure 3(a)**. La source laser est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}82$ nm.

En sortie de l'interféromètre, le détecteur P mesure l'intensité de l'interférence entre deux rayons cohérents. Lors des cheminements, les deux rayons, qui interfèrent, rencontrent des dispositifs optiques qui les réfléchissent et/ou les transmettent : C_1, C_2, M, S_{p1}, S_{p2} et S_{p3}. Pour les besoins de cette expérience, on utilise deux miroirs identiques particuliers, en "coins de cubes" : C_2 fixe de coin O_2 et C_1 de coin O_1 en translation verticale de chute libre. Chacune des trois lames séparatrices S_{p1}, S_{p2} et S_{p3} est inclinée de 45° par rapport aux rayons laser incidents et chacune donne un rayon réfléchi et un rayon transmis. Le miroir M est incliné de 45° par rapport au rayon incident. L'ensemble est placé dans l'air d'indice optique $n = 1$. On ne tiendra pas compte de déphasages dus aux réflexions.

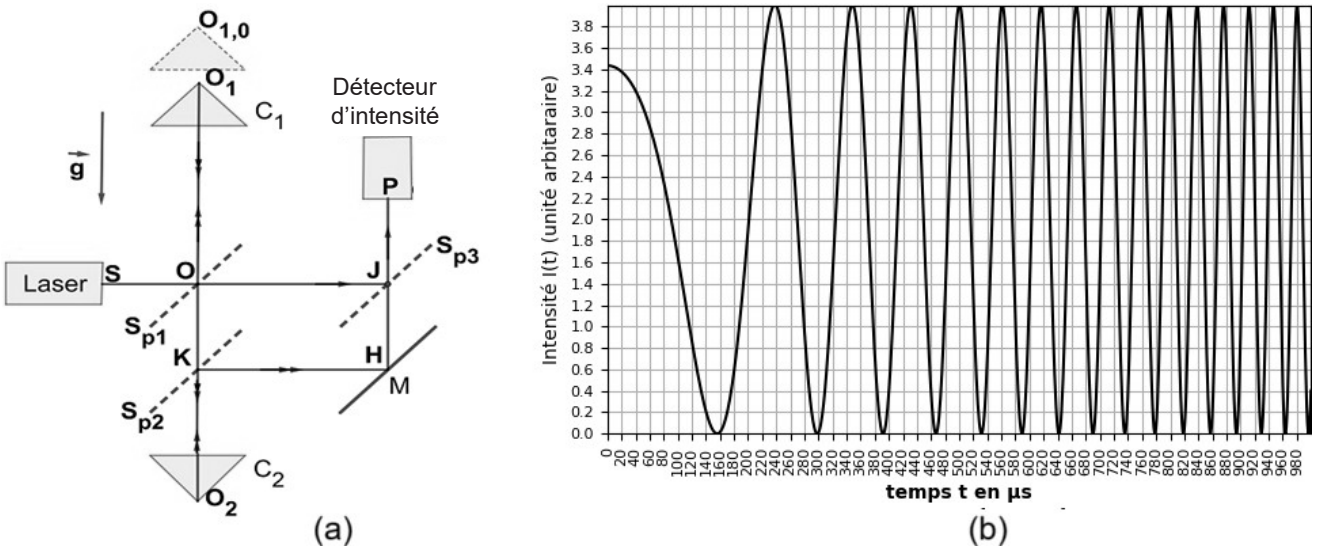


Figure 3 - Mesure du champ de pesanteur terrestre par un interféromètre de Mach-Zehnder

Q9. Le corps C_1 tombe en chute libre, sans vitesse initiale, parallèlement à lui-même à l'intérieur d'une chambre vide.

a) Justifier l'hypothèse de la norme g constante en donnant une estimation de la variation relative $\dfrac{g(h)-g(0)}{g(0)}$ pour une hauteur de chute égale à $h = 1\,\text{m}$.

b) Déterminer, alors, l'équation horaire du mouvement de O_1 en fonction du temps : $z_1(t)$, en prenant la position initiale $O_{10}(t=0)$ comme origine des espaces sur l'axe vertical descendant.

On étudie l'interférence des deux rayons, passant par O_1 et O_2, qui arrivent au point P du récepteur après des parcours optiques distincts. Le point O_2 appartient aussi à la même verticale que O_1, il est repéré par son ordonnée $z_2 = 0{,}3\,\text{m}$.

Q10. a) Exprimer en fonction du temps t la différence de chemins optiques $\delta(P,t)$ entre ces deux rayons.

b) On donne, en **figure 3(b)**, la représentation graphique $I(t)$ de l'intensité au point P en fonction du temps. On note t_0 l'instant correspondant au premier minimum de l'intensité et t_q les instants des autres minima d'intensité successifs, avec q appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Exprimer la quantité $\Delta_q = \delta(P,t_q) - \delta(P,t_0)$. En déduire l'expression de g en fonction de t_0, t_q, λ et de q.

c) On veut déterminer la valeur locale de g. Il est commode d'exploiter le graphe d'une fonction linéaire affine y(q) : préciser ce qu'est la fonction y.

Les mesures expérimentales permettent d'obtenir $y(q) = 64\,598\,q$. Sans effectuer le calcul numérique, indiquer comment on en déduit que $g = 9{,}7961\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Partie IV - Le calcaire et l'argile : des richesses du sol bon marché

<table>
<tr><th colspan="2">Données utiles pour la partie IV</th></tr>
<tr><td>Constante des gaz parfaits</td><td>$R = 8,31\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$</td></tr>
<tr><td>Masses molaires en $g \cdot mol^{-1}$</td><td>
<table>
<tr><th>Carbone
C</th><th>Oxygène
O</th><th>Silicium
Si</th><th>Aluminium
Al</th><th>Calcium
Ca</th><th>Fer
Fe</th></tr>
<tr><td>12</td><td>16</td><td>28</td><td>27</td><td>40</td><td>56</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Produit ionique de l'eau (à 25 °C)</td><td>$K_e = 10^{-14}$</td></tr>
</table>

Dans les parties de chimie, l'état d'une substance chimique est noté en indice : *s* désigne *solide*, *g* désigne *gaz* et *aq* signifie *dissous en solution aqueuse*.

Partie IV.1 - Obtention d'un ciment

Vers 1 450 °C, on élabore le ciment à partir de la chaux $CaO_{(s)}$ provenant du calcaire ($CaCO_{3,(s)}$) et des oxydes $SiO_{2,(s)}$, $Al_2O_{3,(s)}$ et $Fe_2O_{3,(s)}$ apportés par l'argile (**tableau 1**).

Oxyde réactif	$CaO_{(s)}$	$SiO_{2,(s)}$	$Al_2O_{3,(s)}$	$Fe_2O_{3,(s)}$
Masse molaire en $g \cdot mol^{-1}$	56	60	102	160
% en masse dans le mélange réactionnel	p_1	p_2	p_3	p_4

Tableau 1

Le produit de réaction, appelé ciment, est formé de 4 composants A, B, C et D de formules et de masses molaires M (en $g \cdot mol^{-1}$) données dans le **tableau 2**.

Composant du ciment	A	B	C	D
	$Ca_3SiO_{5,(s)}$	$Ca_2SiO_{4,(s)}$	$Ca_3Al_2O_{6,(s)}$	$Ca_4Al_2Fe_2O_{10,(s)}$
	$3CaO \cdot SiO_2$	$2CaO \cdot SiO_2$	$3CaO \cdot Al_2O_3$	$4CaO \cdot Al_2O_3 \cdot Fe_2O_3$
M (en $g \cdot mol^{-1}$)	228	172	270	486
% en masse	p_5	p_6	p_7	p_8

Tableau 2

La qualité du ciment dépend des compositions massiques des quatre composants A, B, C et D et celles-ci peuvent être obtenues par des formules dites formules de Bogue.

On fait les hypothèses suivantes :
(H1) : tout l'oxyde $Fe_2O_{3,(s)}$ se retrouve dans le composé D,
(H2) : tout l'oxyde $Al_2O_{3,(s)}$ restant sert à fabriquer le composé C,
(H3) : tout l'oxyde $SiO_{2,(s)}$ se retrouve dans les composés A et B,
(H4) : tout l'oxyde $CaO_{(s)}$ se retrouve dans l'ensemble des composés A, B, C et D.

Q11. Écrire les quatre équations de réactions d'obtention des composés A, B, C et D à partir de leurs oxydes.

On se propose d'écrire un script Python permettant de déterminer la composition massique du ciment en les composants A, B, C et D, en fonction de la composition en oxydes réactifs $CaO_{(s)}$, $SiO_{2,(s)}$, $Al_2O_{3,(s)}$ et $Fe_2O_{3,(s)}$.
On introduit le vecteur *oxy* dont les composantes sont p_1, p_2, p_3 et p_4 et le vecteur *cim* de composantes p_5, p_6, p_7 et p_8.
Soit *gob* la matrice 4x4 telle que *oxy* = *gob*cim*.

Q12. Compléter le script ci-dessous à la ligne 5, qui définit la matrice *gob* par ses éléments β_{ij} exprimés en fonction des masses molaires $M_{1\leq i\leq 8}$.

Le script se poursuit par les lignes 6, 7 et 8 :

- la ligne 6 détermine *bog*, la matrice inverse de la matrice *gob*,
- la ligne 7 définit le vecteur *cim* et la ligne 8 affiche le résultat.

```
1  import numpy as np
2  M1,M2,M3,M4=56,60,102,159
3  M5,M6,M7,M8=3*M1+M2,2*M1+M2,3*M1+M3,4*M1+M3+M4
4  oxy=np.array([62, 24, 9, 5]) #exemple d'un mélange réactionnel des quatre oxydes
5  gob=…  #définition de la matrice gob
6  bog=np.linalg.inv(gob)
7  cim=np.dot(bog,oxy)
8  print('cim=',cim)
```

Partie IV.2 - Les pluies acides

D'après *Cembureau*, l'Association européenne du ciment, en 2023, la production mondiale de ciment s'est élevée à 4,0 Gt. Cette production s'accompagne de l'émission d'énormes quantités du dioxyde de carbone. Dans l'eau, ce gaz donne une solution de diacide faible ($CO_{2,(aq)}$,H_2O) qu'on pourra modéliser par la "formule" $H_2CO_{3,(aq)}$.

Q13. a) Écrire les deux équilibres acido-basiques de ce diacide et expliciter l'expression de leurs quotients réactionnels. On supposera les solutions aqueuses suffisamment diluées pour confondre les activités des solutés avec la valeur de leur concentration en quantité de matière volumique exprimée en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

b) La **figure 4** donne, en fonction du pH, les proportions, ou pourcentages (%), des différentes espèces acido-basiques issues de la dissolution du dioxyde de carbone dans l'eau : ces courbes sont notées (1), (2) et (3). Attribuer chacune de ces courbes aux trois espèces acido-basiques du diacide.

c) Déterminer les valeurs des constantes d'acidités K_{a1} et K_{a2} pour le diacide étudié.

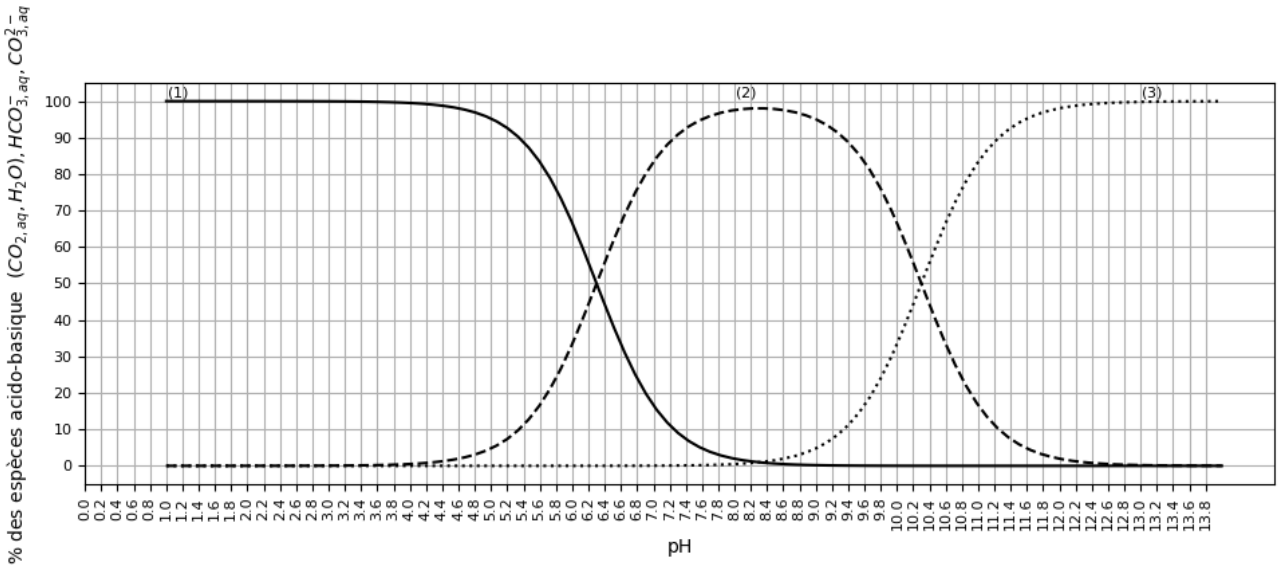


Figure 4 - Distribution des espèces acido-basiques issues de la dissolution de $CO_{2,(g)}$ dans l'eau, en fonction du pH

Q14. On étudie l'eau de pluie devenue acide à cause de la dissolution du dioxyde de carbone $CO_{2(g)}$ atmosphérique. Elle impose une concentration molaire volumique du dioxyde de carbone dissous $c = \left[CO_{2,(aq)}, H_2O\right] = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ constante à température et pression fixées. Établir l'expression du pH de cette solution à 25 °C et déterminer les valeurs de toutes les concentrations des espèces présentes dans la solution.

Partie V - Quelques propriétés thermodynamiques de la Terre

La vie de tous les êtres vivants dépend de la température sur la Terre et celle-ci relève de son bilan énergétique. Une variation moyenne de la température de 1,5 K peut entraîner des conséquences importantes pour l'humanité.

Partie V.1 - Mesure de la conductivité thermique d'une roche terrestre

On considère le dispositif représenté en **figure 5**. Des thermocouples permettent de mesurer les différentes températures. On note T_c et T_f les températures imposées grâce à des courants d'eau chaude et froide respectivement ; T_1 et T_2 sont les températures aux interfaces entre le laiton et les contacts 1 et 2 respectivement. On note d et l les longueurs respectives de l'échantillon de roche et de celui du laiton (alliage métallique). Les "contacts" entre la roche et le laiton, par de l'air par exemple, mettent en jeu des résistances thermiques inconnues, sur des épaisseurs e_1 et e_2. Enfin, on note par λ_l, λ, λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques du laiton, de la roche et des contacts 1 et 2. On admet qu'avec ce dispositif la température ne dépend que de la variable z.

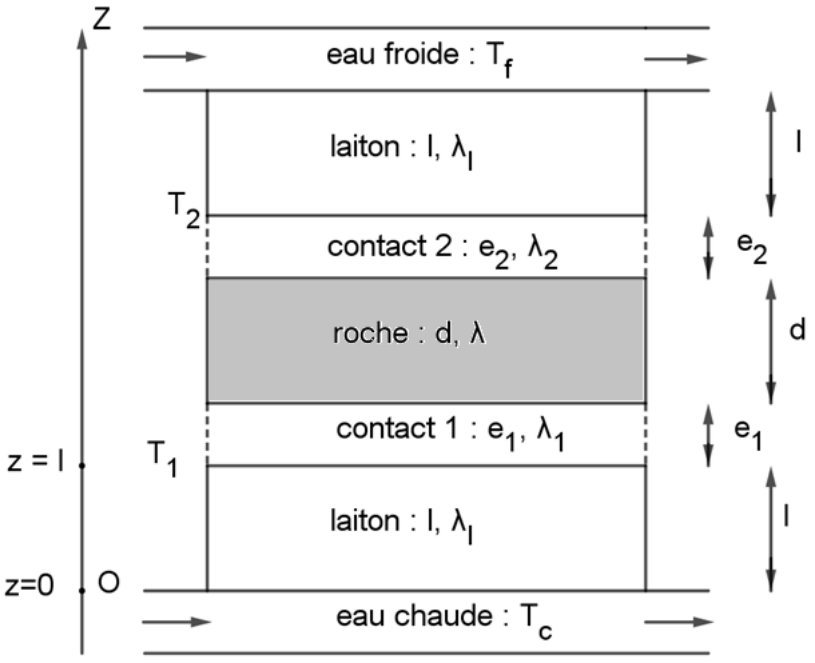


Figure 5 - Dispositif de mesure de la conductivité thermique d'une roche

Q15. Donner la définition et l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un conducteur thermique de conductivité λ, de section s et de longueur l traversé par un flux thermique uniforme perpendiculaire à la section.

Q16. Établir alors, la relation $\dfrac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = \dfrac{\lambda_l}{l}\left(\dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{e_1}{\lambda_1} + \dfrac{e_2}{\lambda_2}\right)$. Expliquer comment on peut déterminer λ expérimentalement, en s'affranchissant des indéterminations dues aux contacts.

Partie V.2 - Évolution de la température à l'intérieur de la Terre

On considère une sphère de centre O, de rayon r, de masse volumique uniforme μ et de masse m. Une masse dm est apportée depuis l'infini jusqu'à la distance *r* sur la surface de la sphère.

Q17. a) Exprimer l'énergie gravitationnelle finale $dE_{pG}(r)$ des masse m et dm. On considère l'énergie gravitationnelle nulle quand dm est infiniment éloignée de m.

b) On modélise la formation d'une sphère de centre O, de rayon *R* et de masse volumique uniforme μ par l'apport de coquilles sphériques, d'épaisseur *dr* et de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$, depuis l'infini jusqu'à la position occupée dans la sphère.
Établir que l'expression de l'énergie gravitationnelle $E_{pG}(R)$ de cette distribution de masse totale *M* est : $E_{pG}(R) = -\dfrac{3G}{5}\dfrac{M^2}{R}$. Commenter le signe.

Q18. La sphère précédente modélise la Terre. En supposant que l'énergie gravitationnelle est convertie totalement en énergie thermique, exprimer la température T_{eq} atteinte par la Terre à partir d'une température initiale voisine de 0 K, en fonction de M_T, R_T, G et de C (capacité thermique massique de la Terre). Estimer T_{eq} et commenter.

Le manteau terrestre, de masse volumique moyenne $\mu = 4{,}5 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, occupe 84 % du volume total de la Terre.

On s'intéresse à la puissance calorifique volumique p_v générée par la radioactivité d'éléments contenus dans les roches du manteau. La puissance générée par cette radioactivité est estimée à $P = 1{,}2 \cdot 10^{13}$ W . Les principaux éléments radioactifs à prendre en compte sont l'uranium U, le thorium Th et le potassium K dont les désintégrations radioactives produisent une quantité d'énergie spécifique convertie en chaleur.

On attribue les indices *i* = 1, 2 et 3 respectivement aux éléments uranium U, thorium Th et potassium K. Pour chacun des noyaux ${}^{A_i}X_i$, on note M_i, x_i, τ_i et ε_i respectivement la masse molaire, la fraction massique dans la roche (valeur du rapport de la masse de l'isotope par la masse de roche qui la contient), la demi-vie et l'énergie spécifique libérée par atome. La demi-vie τ_i (ou "période") correspond à la durée au cours de laquelle le nombre de noyaux est réduit de moitié.
Les valeurs sont données dans le **tableau 3**.

Noyau ${}^{A_i}X_i$	${}^{238}_{92}\text{U}$	${}^{232}_{90}\text{Th}$	${}^{40}_{19}\text{K}$
Masse molaire (en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	238	232	40
Fraction massique x_i de l'isotope	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$	$4{,}0 \cdot 10^{-8}$	$1{,}9 \cdot 10^{-8}$
Demi-vie τ_i (en 10^9 ans)	4,46	14,0	1,26
Énergie thermique dégagée ε_i (en J par noyau) par l'isotope	$7{,}41 \cdot 10^{-12}$	$6{,}24 \cdot 10^{-12}$	$1{,}14 \cdot 10^{-13}$

Tableau 3 - Production d'énergie par la radioactivité au sein de la Terre

On note N_i le nombre de noyaux par unité de volume de roche ; lors de la désintégration des noyaux, le taux de variation du nombre N_i est de la forme :

$$\frac{dN_i}{dt} = -\frac{Ln2}{\tau_i} N_i .$$

Q19. Déterminer l'expression $N_i(t)$ en notant N_{i0} sa valeur à l'origine des temps.

Q20. Exprimer la puissance volumique $p_{V,i}(t)$ pour l'élément X_i dégagée par radioactivité dans les roches, en fonction des données utiles. En déduire la puissance totale $p_V(t)$ dégagée par les trois éléments radioactifs.

On utilise le script Python ci-dessous pour étudier l'évolution temporelle de la puissance volumique.

```
1   import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
2   Na,mu=6.02*10**23,4500
3
4   Mi=np.array([0.238,0.232,0.04])
5   ci=np.array([(10**-8)*1.3,(10**-8)*4,(10**-8)*1.87])
6   epsi=np.array([(10**-12)*7.41,(10**-12)*6.24,(10**-12)*0.114])
7   taui=(365*24*3600*10**9)*np.array([4.46,13.9,1.26])
8   tGyi=np.array([4.46,13.9,1.26])
9
10  pvi0=0.69*mu*Na*np.array([(ci[k]*epsi[k])/(Mi[k]*taui[k]) for k in range(0,3)])
11  t=np.linspace(0,10,100)#Gigaans
12  def pv(t):
13      return # expression de pv(t) de la question Q20
14  #v.min(): donne la valeur minimale des éléments du vecteur v
15  Dp=(np.abs(pv(t)-pv(0)/2)).min()
16  #l.index(x): donne la position de x dans la liste l
17  n=((np.abs(pv(t)-pv(0)/2)).tolist()).index(Dp)
18  t0=t[n]
19  print('pv0(nW/m3)=',pv(0),' --- t0=',t0)
20  …
    …
```

Q21. Compréhension et exploitation du script

a) Ligne 10 : donner la signification physique de *pvi0*.

b) Ligne 15 : que représente la grandeur *Dp* ?

c) Ligne 17 : que représente *n* ?

d) Ligne 19 : que représentent *pv(0)* et *t0* ? Comment augmenter la précision sur *t0* ?

e) Compléter les lignes, après la ligne 19, pour que l'exécution du programme donne et visualise l'allure du graphe de la puissance volumique totale en fonction du temps $p_V(t)$ (sans quadrillage).

Le graphe de la **figure 6** schématise l'évolution de la puissance volumique avec le temps.

f) Reproduire l'allure de ce graphe sur votre copie et en déduire, avec justification, la date $t_{1/2}$ à laquelle la puissance volumique sera réduite de moitié.

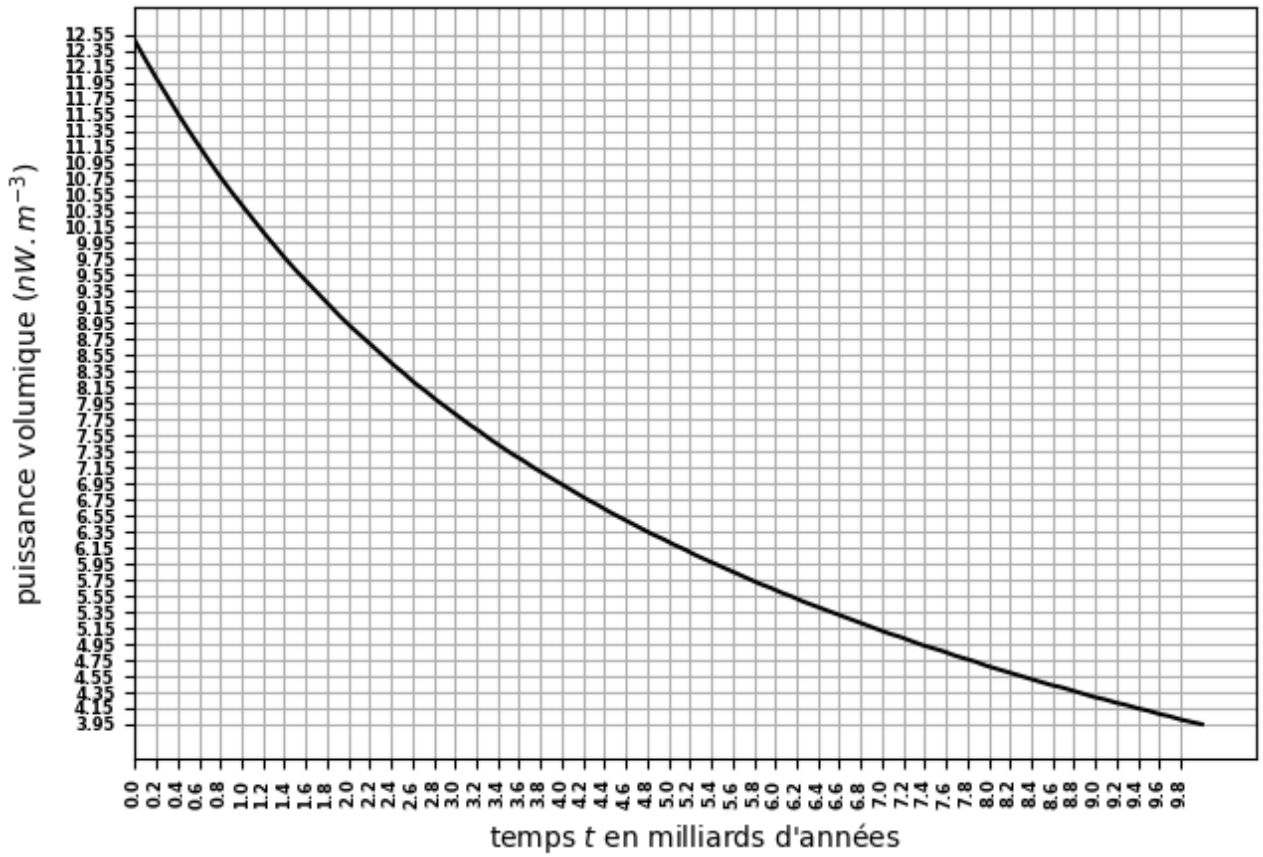


Figure 6 - Évolution de la puissance volumique, d'origine radioactive, avec le temps

La Terre sphérique, de rayon R_T, est supposée homogène et caractérisée par les valeurs uniformes de sa masse volumique μ, sa capacité thermique massique C et sa conductivité thermique λ, de valeur approximative $\lambda \approx 3\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q22. Justifier que le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$ est radial.

On pose $\vec{j} = j(M,t)\overrightarrow{u_r}$. Préciser les invariances.

On se propose d'établir l'expression donnant les variations de la température $T(M,t)$ dans la Terre.

Q23. On se place d'abord en régime variable et on prend comme système la coquille sphérique d'épaisseur dr, comprise entre les rayons r et $r+dr$. Pendant la durée élémentaire dt, la température de ce système varie de dT. Expliciter le raisonnement qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\mu C 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t} dt\, dr = -d\left(j 4\pi r^2\right) dt + p'_V\, 4\pi r^2 dr\, dt \ .$$

Donner la signification physique de chacun de ces trois termes.

On néglige la variation temporelle de la température dans la question **Q24**.

Q24. a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.

b) Déterminer la loi de variation spatiale de la température $T(r)$ dans la Terre en supposant que la température est finie au centre de celle-ci et que la puissance volumique p'_V est uniforme dans tout le volume de la Terre. La température du sol vaut $T_S = 298\ \text{K}$.

c) Déterminer l'expression de la puissance surfacique $j(r)$.

d) On donne la puissance surfacique à la surface de la Terre $j(R_T) = 70\,\text{mW} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire la valeur de p'_V. Commenter compte tenu de **Q21**.

Partie VI - Bilan énergétique sur le sol de la Terre, d'après une analyse documentaire

Une température convenable à la surface de la terre est primordiale pour toutes les formes de la vie. Cette température résulte des échanges énergétiques de la Terre avec le Soleil, principalement, et avec l'atmosphère. Ces échanges sont représentés sur la **figure 7**, où les valeurs des puissances surfaciques sont données en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. En particulier, la puissance surfacique du rayonnement solaire en haut de l'atmosphère vaut $\varphi_S = 341\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

On notera P_s la puissance rayonnée par la surface du Soleil et D la distance entre le Soleil et la Terre, avec $D = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m}$.

On rappelle qu'un corps noir, de température T, émet un maximum d'énergie électromagnétique pour une longueur d'onde λ donnée par la loi de Wien, on a : $\lambda T = C_W$ où C_W est appelée constante de Wien. En outre, le flux surfacique émis est donné par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan.

Document (source Trenberth *et al* 2009)

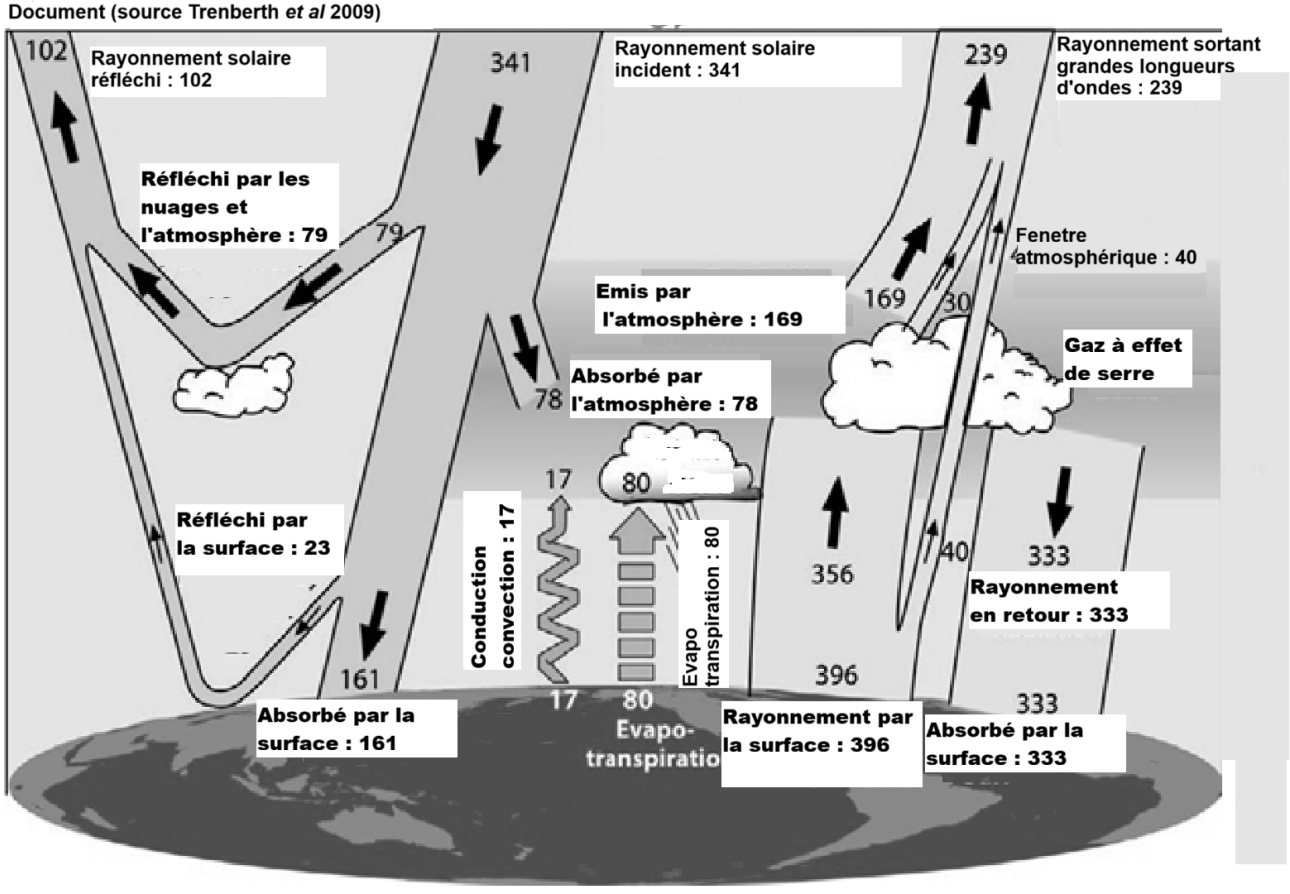


Figure 7 - Flux énergétiques échangés entre le sol terrestre, le Soleil et l'atmosphère (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)

Dans le vide interstellaire et en tout point *M* éloigné du soleil, celui-ci peut être assimilé à un point *C*, son centre, et l'on pose $\overrightarrow{CM} = r\,\overrightarrow{u_r}$. Le rayonnement solaire est à symétrie sphérique, le vecteur de Poynting est radial : $\vec{R} = R(r,t)\overrightarrow{u_r}$ et on note $u_{em}(M,t)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique.

Q25. On considère le couple (R,u_{em}). En s'appuyant sur l'analogie $(R,u_{em}) \leftrightarrow (j,\mu cT)$, donner la relation générale analogue à celle donnée dans la question **Q23**.
Dans notre cas particulier et en supposant qu'on est en régime permanent, donner la relation entre la puissance rayonnée $P_{em}(r=D)$ à travers une sphère de rayon *D* et la puissance P_S.

Q26. On note P_T la puissance reçue à la face supérieure totale de l'atmosphère terrestre. Exprimer la puissance P_T en fonction de P_S et des constantes pertinentes.

On assimile le Soleil, de surface S_S, à un corps noir dont le maximum d'énergie électromagnétique volumique correspond à la longueur d'onde $\lambda_S = 0{,}52$ µm.

Q27. Montrer que la puissance totale émise de la surface du soleil P_S peut s'exprimer en fonction de λ_S par la relation : $P_S = \sigma S_S \left(\frac{C_W}{\lambda_S}\right)^4$, dans laquelle C_W est une constante qui vaut $C_W \approx 0{,}03$ m·K et σ est la constante de Stefan.

Q28. En exploitant certaines données de la **figure 7**, estimer la puissance P_S. Utiliser un bilan énergétique pour estimer la puissance surfacique nette algébrique φ_{tot} reçue par la Terre seule. Commenter.

Q29. On note ΔT la variation de température au niveau du sol terrestre pendant une durée τ. Exprimer ΔT en fonction des données utiles. Faire l'application numérique pour $\tau = 10$ ans.

Partie VII - Le champ magnétique terrestre

La connaissance du magnétisme terrestre est utile pour étudier les communications électromagnétiques. La protection vis-à-vis de certaines radiations cosmiques par le bouclier magnétique dépend aussi du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique $\vec{m} = -m\,\overrightarrow{u_z}$, placé au centre O de la Terre et porté par l'axe des pôles OZ, axe orienté de S vers N (**figure 8**).
On montre que ce dipôle crée en un point M, repéré dans la base sphérique par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$, le champ magnétique donné par l'expression intrinsèque :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(3(\vec{m}.\vec{r})\vec{r} - (\vec{r})^2\,\vec{m}\right)}{r^5}.$$

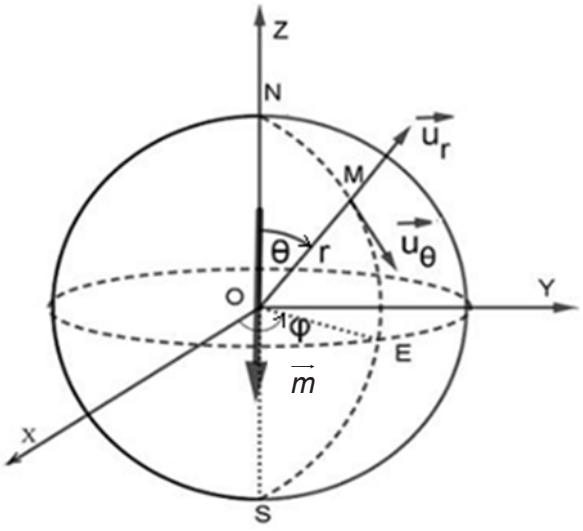


Figure 8 - Dipôle magnétique terrestre

Q30. Donner les trois composantes $\left(B_r, B_\theta, B_\varphi\right)$ du champ magnétique dans la base sphérique.

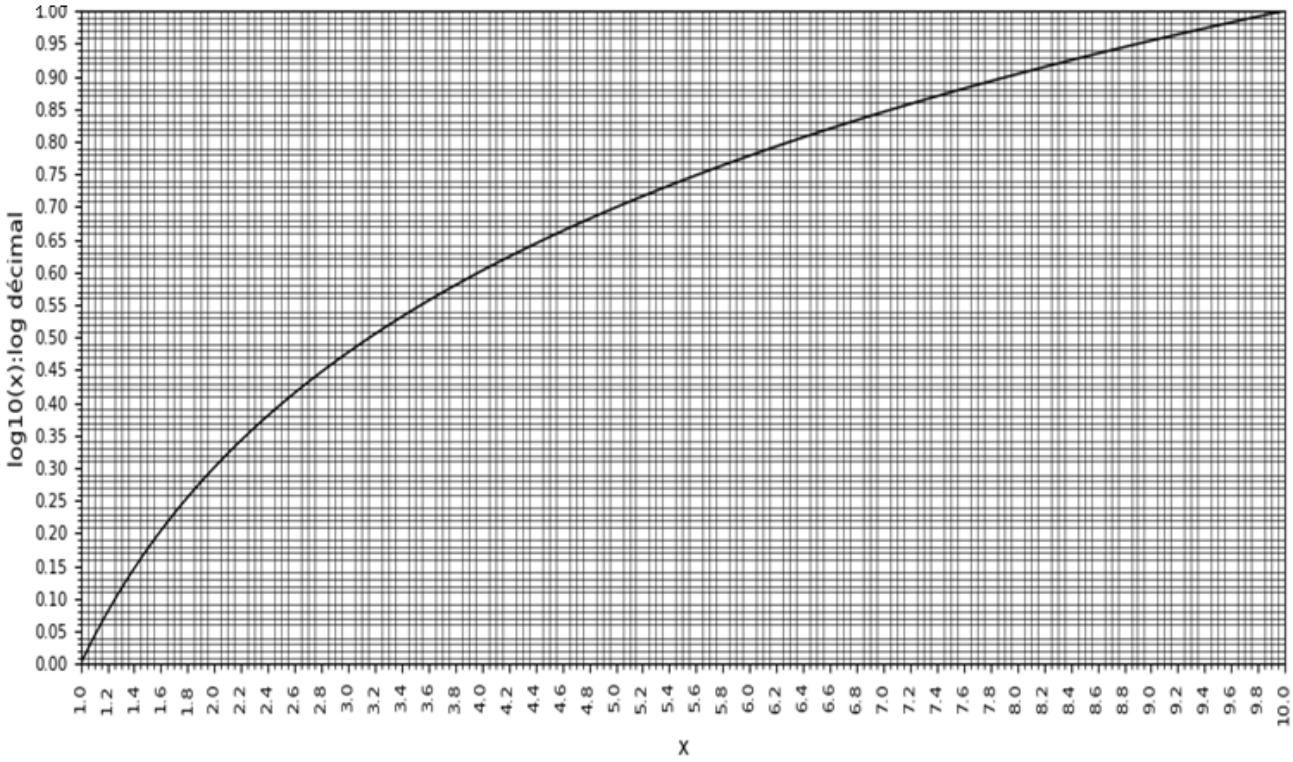
Q31. Déterminer l'équation $r\left(\theta\right)$ d'une ligne de champ magnétique et tracer l'allure du graphe d'une ligne de champ dans un plan méridien.

Q32. En un lieu du sol terrestre de latitude $\Lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$, expliciter la composante horizontale B_h et la composante verticale B_v du champ magnétique terrestre en fonction de m, Λ, μ_0 et de R_T.

Q33. Application numérique : sur le sol de l'équateur, l'intensité du champ magnétique est $B = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ T. En déduire une estimation de la valeur m du dipôle magnétique terrestre.

Annexe - Valeurs pour faire certains calculs numériques et courbe log10(x)

Données	Valeur x	log10(x)
π	3,14	0,50
Rayon de la Terre supposée sphérique	$R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m	6,81
Masse de la Terre	$M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg	24,78
Constante d'attraction universelle	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	– 10,17
Vitesse angulaire de rotation de la Terre /axe sud-nord	$\Omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$	– 4,14
Capacité calorifique massique de la Terre	$C \approx 10^3\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$	3,00
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$	23,78
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$	– 5,90



FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1033 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Système physico-chimique et état final d'une transformation chimique
- Réactions acide-base

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/mpi