Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2000, filière PC

## Mathématiques 2

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : nombres et polynômes de Bernoulli
- Partie II : développements en série de Fourier
- Partie III : intégrale de t^(x-1)/(e^t - 1)

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2000/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

# MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.*
*Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

## PARTIE I

**I.1** On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ de la variable complexe $z$.

**I.1.1** Déterminer son rayon de convergence.

**I.1.2** Calculer sa somme $S(z)$. On distinguera les cas $z = 0$ et $z \neq 0$.

**I.2** Soit la fonction $f$ de la variable complexe $z$ définie sur $\mathbb{C} - \{2ki\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}^*\}$ par :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \text{ pour } z \notin 2i\pi\mathbb{Z} ,$$

$$f(0) = 1 .$$

Nous admettrons qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme sur son disque ouvert de convergence est égale à $f(z)$.

**I.2.1** Montrer que $R \leq 2\pi$. Nous admettrons que $R = 2\pi$.

**I.2.2** Calculer $B_0$.

**I.2.3** Donner pour tout $n \geq 1$ l'expression de $B_n$ en fonction de $B_0, \ldots, B_{n-1}$ (on pourra remarquer que pour $|z| < 2\pi$, on a l'égalité $S(z)f(z) = 1$ ). En déduire que $B_n$ est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**I.2.4** Calculer $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$.

**I.2.5** Calculer $f(z) - f(-z)$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.

**Tournez la page SVP**

**I.3**

**I.3.1** Exprimer $1+\dfrac{f(4z)-f(2z)}{z}$ en fonction de $e^{2z}$.

**I.3.2** En déduire l'expression en fonction des $B_n$ des développements en série entière des fonctions th$x$ et tan$x$ de la variable réelle $x$. Quel est le rayon de convergence des séries entières obtenues ?

**I.4** On considère la fonction $h$ des deux variables complexes $x$ et $z$ définie par :

$$h(x, z) = f(z)\, e^{xz} .$$

**I.4.1** Montrer qu'il existe une suite $(\beta_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels telle que, pour tout couple $(x, z)$ de nombres complexes tel que $|z| < 2\pi$, on ait :

$$(1) \qquad h(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x)\frac{z^n}{n!} .$$

Déterminer le degré de $\beta_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer $\beta_n(0)$ en fonction de $B_n$.

**I.4.2** Calculer $\beta_{k+1}(x + 1) - \beta_{k+1}(x)$ pour $k \geq 0$. En déduire une expression de la somme $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + N^k$ en fonction de $\beta_{k+1}(N + 1)$, $\beta_{k+1}(0)$ et $k$.

**I.4.3** Comparer $h(1-x,-z)$ à $h(x, z)$. En déduire que l'on a $\beta_n(1-x) = (-1)^n\beta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\beta_n(1)$ en fonction de $B_n$.

**I.4.4** On suppose dorénavant que $x$ est réel. On admettra que l'on peut alors dériver terme à terme le deuxième membre de l'égalité (1) par rapport à $x$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta'_{n+1}(x) = (n+1)\beta_n(x)$.

En déduire que $\int_0^1 \beta_n(x)dx = 0$ pour tout $n \geq 1$.

## PARTIE II

Les résultats de la question I.4 permettent de définir la suite de polynômes $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ introduite à la question I.4.1 par la récurrence suivante :

$$\text{(i)} \qquad \beta_0(x) = 1 ,$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \beta'_{k+1}(x) = (k+1)\beta_k(x) \text{ et } \int_0^1 \beta_{k+1}(x)dx = 0 .$$

Pour tout nombre entier $k \geq 0$, on note $\phi_k(x)$ la fonction $2\pi$-périodique de la variable réelle $x$ qui coïncide avec $\beta_k\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

**II.1** Calculer $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ et $\beta_3(x)$. On vérifiera en particulier que $\beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

**II.2**

**II.2.1** Vérifier que $\phi_2$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

**II.2.2** Développer $\phi_2$ en série de Fourier réelle.

**II.3**

**II.3.1** Montrer que pour tout $k \geq 3$ la fonction $\phi_k$ est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\phi_k' = \frac{k}{2\pi}\phi_{k-1} \quad ,$$

$$\phi_k^{(k-2)} = \frac{k!}{2^{k-1}\pi^{k-2}}\phi_2 \quad .$$

**II.3.2** En déduire le développement en série de Fourier réelle de $\phi_{2p}$ pour $p$ entier supérieur ou égal à 1.

**II.3.3** Exprimer, pour $p$ entier supérieur ou égal à 1, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de $\beta_{2p}(0)$ et $p$.

## PARTIE III

On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$, où $x$ est un nombre réel.

**III.1** Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 1$.

**III.2** Montrer que la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

**Tournez la page SVP**

**III.3** On suppose $x$ fixé, strictement supérieur à 1 .

**III.3.1** Vérifier que pour tout $t > 0$ on peut écrire $\dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$ .

**III.3.2** Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$ .

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et, pour tout $n \geq 2$ , $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt$ .

**III.3.3** Calculer, pour tout $n \geq 2$ , $\Gamma_n(x)$ en fonction de $n$ , $x$ et $\Gamma(x)$ .

**III.3.4** En déduire que pour tout $x > 1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{F(x)}{\Gamma(x)}$ .

**III.4** Soit $k$ un nombre entier supérieur ou égal à 2 .

**III.4.1** Exprimer $\Gamma(k)$ en fonction de $k$ et $\Gamma(k - 1)$ .

**III.4.2** En déduire la valeur de $\Gamma(k)$ et l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$ en fonction de $k$ et $F(k)$ .

**Fin de l'énoncé**

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'apr ésdocu mentsfou rnis.

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Séries numériques et vectorielles
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Suites et séries de fonctions

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc