Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2001, filière PC

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : la fonction Jn et son équation différentielle
- Partie II : développement en série entière et séries de Fourier
- Partie III : équation de Bessel d'indice réel

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2001/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Pour tout nombre entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction J_n de la variable réelle x par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

PARTIE I

I.1 Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair.

I.2 Exprimer $J_{-n}(x)$ en fonction de $J_n(x)$.
On supposera dorénavant que n est un nombre entier positif ou nul.

I.3 Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.4 Montrer que l'on a $J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t.\,[(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)]\,dt$.
En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_n)\quad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

PARTIE II

II.1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2pt.\cos(x\sin t)dt,$$

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2p+1)t.\sin(x\sin t)dt.$$

II.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$ tout entier (on utilisera les développements en série entière des fonctions cosinus ou sinus, selon la parité de n).

II.3 Soit p un nombre entier naturel.

II.3.1 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \cos 2pt.\sin^{2k} t dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k} t$ comme combinaison linéaire des $\cos 2qt$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.

En déduire les coefficients $\alpha_{2k}(p)$ du développement en série entière $J_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}(p) x^{2k}$ de J_{2p} sur $\mathbb{R}$.

II.3.2 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \sin(2p+1)t.\sin^{2k+1} t dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k+1} t$ comme combinaison linéaire des $\sin(2q+1)t$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.

En déduire les coefficients $\alpha_{2k+1}(p)$ du développement en série entière $J_{2p+1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1}(p) x^{2k+1}$ de J_{2p+1} sur $\mathbb{R}$.

II.3.3 A. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction des valeurs des $J_n(x)$ les coefficients de Fourier des fonctions $\cos(x \sin t)$ et $\sin(x \sin t)$ de la variable t. Ces deux fonctions sont-elles égales à la somme de leurs séries de Fourier ?

B. En déduire la valeur des sommes $J_0(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(x)$, $J_0(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x)$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(x)$ et $J_0(x)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_n(x)^2$.

PARTIE III

On considère l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_\lambda) x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

où λ est un nombre réel donné.

III.1 .

III.1.1 Montrer que, pour que $x^\lambda z(x)$ soit solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$, il faut et il suffit que z soit solution de l'équation :

$$(B'_\lambda) xz'' + (2\lambda + 1) z' + xz = 0.$$

III.1.2 Dans le cas où $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, déterminer la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$, et en déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.1.3 En déduire la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ lorsque $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

On se propose à présent de chercher les solutions de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $y(x) = x^\lambda z(x)$, où $z(x)$ est la somme d'une série entière.

III.2 On cherche les solutions de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

III.2.1 Etablir la relation qui doit exister pour tout $k \geq 1$ entre a_{k+1} et a_{k-1} pour que z soit solution de (B'_λ).

On suppose dorénavant que λ n'est pas un entier strictement négatif.

III.2.2 Montrer qu'il existe une unique solution z_λ de (B'_λ) de la forme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, et telle que $a_0(\lambda) = 1$. Calculer $a_{2p}(\lambda)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2p}(\lambda)x^{2p}$?

III.3 On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction j_λ par $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$.

III.3.1 On suppose que λ n'est pas un nombre entier.
Montrer que les fonctions j_λ et $j_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.
En déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.3.2 Soit n un nombre entier strictement positif.
Comparer j_n à la fonction J_n, définie au début du problème.
Vérifier que la fonction z_{-n}, définie par $z_{-n}(x) = x^{2n}z_n(x)$ est solution de l'équation (B'_{-n}).

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Séries entières
- Suites et séries de fonctions
- Nombres complexes et trigonométrie
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc