Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2001, filière PC

Physique 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème I : formation de neige artificielle
- Problème II : turbine Pelton

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2001/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SESSION 2001

PC005

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

PHYSIQUE 1

DURÉE: 4 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée - Les deux problèmes sont indépendants

PROBLEME I - FORMATION DE NEIGE ARTIFICIELLE

Certains hivers, il faut améliorer l'enneigement des pistes de ski en utilisant de la neige artificielle. Elle est produite à l'aide de canons à neige. La qualité de la neige produite dépend principalement des conditions atmosphériques et de la façon dont sont générées les gouttes d'eau à l'intérieur du canon. On se propose ici de traiter quelques points relatifs à la thermodynamique et aux transferts thermiques mis enjeu lors de la production de neige artificielle.

Quelques données thermodynamiques de l'eau sont disponibles à la fin de l'énoncé.

I- Changement de phase solide-liquide des corps

I- 1. D'après le diagramme présenté sur la figure 1 :

- Situer les zones solide, liquide, et vapeur.
- Définir les points X et Y et décrire brièvement ce qui s'y passe.
-Comment s'appellent les courbes sY, Yf et XY ?

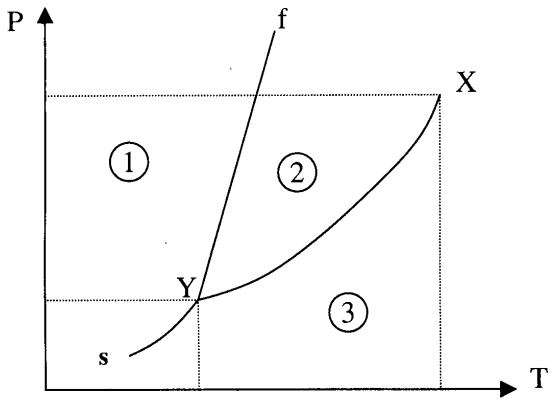


Figure 1

On appelle chaleur latente massique de transition de phase, de la phase 1 vers la phase 2, le transfert thermique L_{12} nécessaire pour réaliser de façon réversible à la température T sous la pression P, la transition de l'unité de masse d'un corps pur, tel que : $L_{12} = h_2 - h_1$ où h_1 et h_2 sont les enthalpies massiques des phases 1 et 2.

1- 2. Montrer que la transition de phase est associée à une discontinuité de l'entropie telle que

$$L_{12} = T\Delta s = T(s_2 - s_1)$$

où $s_1$et s_2 sont les entropies massiques respectives des phases 1 et 2 et T la température de changement de phase à la pression P.

1- 3. Montrer que le changement de phase réversible d'un corps pur se fait à enthalpie libre constante.

1- 4. En déduire la relation de Clapeyron qui donne au point (P_0,T_0) la pente de la courbe de changement de phase dans un diagramme (P,T) en fonction de L_{12}, T_0 et des volumes massiques v_1 et v_2 des phases 1 et 2.

1- 5. Calculer la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide de l'eau dans un diagramme (P,T) à T = 0°C. On donne *d* la densité de la glace: *d = 0,917.* Pourquoi le diagramme de la figure 1 n'est-il pas celui de l'eau ?

1- 6. Donner l'équation de la courbe d'équilibre solide-liquide de l'eau assimilée à une droite.

1- 7. On considère l'échauffement isobare de la glace prise à T = - 5°C sous 500 bars. Quelle est la température de changement de phase de la glace ? Que se passe-t-il si l'échauffement a lieu à une pression inférieure à P_{tr} ?

1- 8. Soient $g_l(T)$ l'enthalpie libre massique de l'eau liquide et $g_s(T)$ l'enthalpie libre massique de l'eau solide calculées à pression constante. Leurs variations en fonction de la température au voisinage de la température de changement de phase T_f sont représentées sur la figure 2. Montrer que l'entropie diminue lorsque le degré d'organisation de la matière augmente.

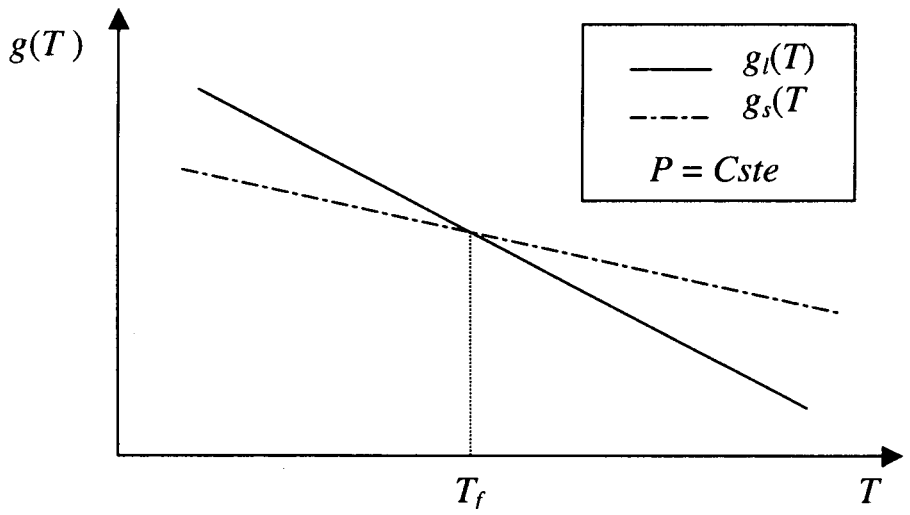


Figure 2 : variations en fonction de la température, au voisinage de la température de changement de phase T_f, des enthalpies libres massiques des phases liquide et solide

1- 9. Qu'appelle-t-on surfusion ?

II- Germination: Modèle de Volmer

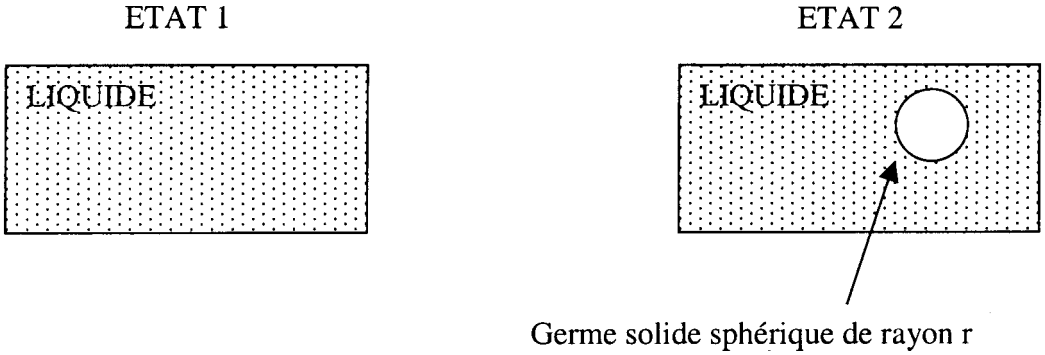
Le processus de changement de phase liquide-solide repose sur le concept de germination. La germination est définie comme la formation d'une nouvelle phase dans une région distincte séparée de ce qui l'entoure par une

limite bien définie : l'interface liquide-solide. L'énergie interfaciale σ (N. m^{-1}), à la température T et à la pression P est définie à partir du travail δW qu'il est nécessaire de fournir au système pour former une interface d'aire dA

$$\delta W = \sigma \, dA$$

Ainsi, la prise en compte d'une interface d'aire A entre deux phases, revient à ajouter le terme σA à l'enthalpie libre.

En évaluant la variation d'enthalpie libre associée à la formation d'un germe sphérique solide dans un volume donné de liquide, le modèle de VOLMER montre que le changement de phase liquide-solide des corps purs ne peut avoir lieu que si la température du système est inférieure à la température thermodynamique de changement de phase à la pression considérée.



Soit *m* la masse totale du système dans l'état 1 et 2, et v_s le volume massique de la phase solide contenue dans le germe sphérique de rayon *r* du système dans l'état 2.

II. 1- Calculer l'enthalpie libre G_1 du système dans l'état 1.

II. 2- Calculer en fonction des enthalpies libres massiques g_l du liquide et g_s du solide, de σ, v_s, m et r l'enthalpie libre G_2 du système dans l'état 2.

II. 3- En déduire la variation d'enthalpie libre ΔG_{12} correspondant au passage du système de l'état 1 à l'état 2.

II. 4- Donner l'allure de $\Delta G_{12}(r)$ pour $T = T_f$ et $T < T_f$. Montrer que l'état 2 ne peut être stable que si $T < T_f$ et que la nouvelle phase ne peut continuer à se développer que si le rayon du germe est supérieur à une valeur minimale $r_{critique}$ que l'on calculera en fonction de g_l, g_s, σ et v_s.

II. 5- En utilisant les données de la figure 2, montrer que la germination est d'autant plus facile que la surfusion est importante.

III- Fabrication de neige artificielle - Canon à neige

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant, à l'aide de canons à neige, de fines gouttes d'eau liquide à T_i=10°C dans l'air ambiant à la température T_e=-15°C. On propose de calculer le temps mis par une goutte d'eau pour passer de l'état liquide à l'état solide. On suppose que la goutte d'eau est sphérique de rayon R=0,2mm et que sa température à tout instant est uniforme. A l'interface eau-air, le flux thermique $d\Phi$ à travers une surface dS dans le sens de la normale extérieure $\vec{n}$ est donnée par la loi des transferts convecto-diffusifs

$$d\Phi = h \, [T(t) - T_e] \, dS$$

où T(t) est la température de la goutte, supposée uniforme, à l'instant t. h est une constante que l'on prendra égale à h = 65 W. m^{-2} K^{-1}.

III- 1. En utilisant le premier principe de la thermodynamique, en supposant la goutte indéformable, en équilibre mécanique avec le milieu ambiant, établir que l'équation qui régit la variation temporelle de la température *T(t)* de la goutte d'eau liquide est

$$\rho c_l R \frac{dT}{dt} = -3h[T(t) - T_e]$$

où c_l est la capacité thermique massique de l'eau liquide et ρ sa masse volumique supposée constante.

III- 2. Montrer que la variation temporelle de la température de la goutte liquide est régie par

$$\frac{T(t) - T_e}{T_i - T_e} = e^{-t/\tau}$$

Exprimer τ en fonction de *h,* ρ*,* c_l et *R.* Calculer le temps t_o mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion *T(to) = -5°C.*

III- 3. Lorsque la goutte atteint la température de -5°C, il y a rupture de la surfusion : la température est alors égale à 0°C et la goutte est partiellement solidifiée. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion. On admettra pour cela la transformation adiabatique car très rapide. On néglige également la variation de volume due au changement de masse volumique.

III- 4. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

III- 5. A son arrivée au sol, le rayon de la goutte solide est inférieur à celui de la goutte liquide injectée par le canon à neige (on néglige la variation de masse volumique avec la température) : la glace s'est sublimée. Quel est le mécanisme physique responsable de cette sublimation ?

Quelques données thermodynamiques de l'eau

Point triple : $T_{tr} = 0{,}01$ °C
$P_{tr} = 0{,}6113$ kPa

Point critique : $P_c = 22{,}09$ MPa
$T_c = 374{,}14$ °C

Chaleur latente de changement de phase solide-liquide ($P = 10^5$ Pa)

$L_f(273\text{K}) = 333$ kJ.kg^{-1}

Capacité thermique massique (à 0°C) : de l'eau liquide : $c_l = 4{,}18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
de l'eau solide : $c_s = 2{,}1$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}

PROBLEME II - ETUDE D'UNE TURBINE PELTON

I- Questions préliminaires

L'espace à trois dimensions est muni d'une base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et on désignera par (x,y,z) les coordonnées d'un point M quelconque de l'espace. Dans tout le problème, $\vec{z}$ désignera l'axe vertical ascendant. On rappelle que l'équation d'un fluide en mouvement, lorsque les effets liés à la viscosité ne sont pas pris en compte (écoulement parfait) est donnée par :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{g}$$

I-1- Interpréter physiquement le terme $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ et en donner son expression analytique en coordonnées cartésiennes. On pourra noter le vecteur vitesse de la façon suivante : $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

On peut montrer que l'expression de $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ *en un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et à l'instant t peut s'écrire :*

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}V^2 + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

I-2- On se place maintenant dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible. Après avoir défini les termes `écoulement permanent' et `fluide incompressible' et en précisant clairement où interviennent les deux hypothèses précédentes, montrer que :

$$\overrightarrow{grad}(P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z) = \rho\vec{V} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{V}$$

I-3- L'écoulement est maintenant supposé irrotationnel.
- Quel théorème en déduit-on ? En donner sa formulation.
- Quelle différence y a t-il lorsque l'écoulement est rotationnel ?
- Citer un exemple d'écoulement rotationnel.

I-4- Donner la signification physique de la quantité $P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z$.

On notera désormais la quantité $H = \frac{1}{\rho g}(P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z)$, *charge du fluide exprimée en mètres de colonne de fluide.*

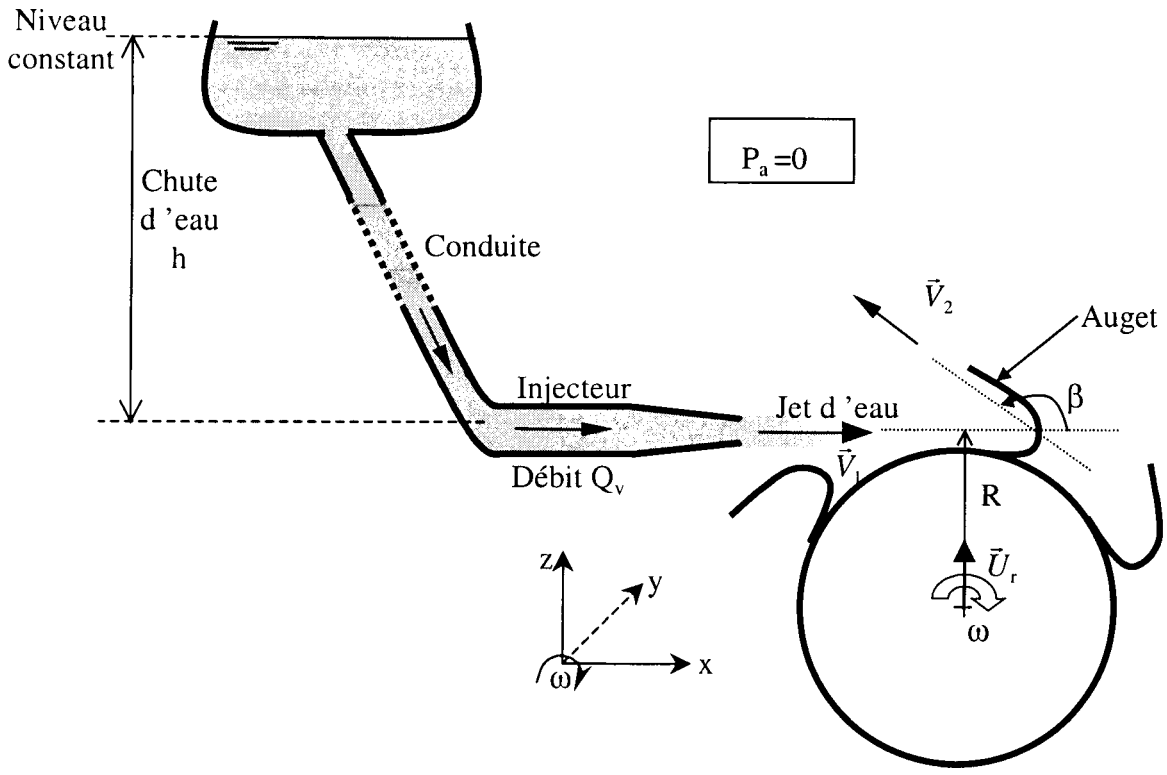
I-5- L'écoulement étant toujours supposé irrotationnel, on considère un tube de courant dans lequel circule un débit Q_V. Montrer que la puissance hydraulique disponible sur ce tube de courant peut s'écrire

$$P_h = \rho g H Q_V$$

II- Etude d'une turbine Pelton

On considère une turbine Pelton, dispositif couramment utilisé par EDF pour convertir l'énergie hydraulique (apportée par les barrages ou bien les conduites forcées) en énergie mécanique. Ce type de turbine est utilisé pour entraîner un alternateur afin de produire de l'énergie électrique. La roue Pelton est un ensemble mobile comportant sur sa périphérie des augets destinés à capter un jet d'eau libre fourni par un injecteur. Cet injecteur est relié par l'intermédiaire d'une conduite à une chute d'eau (voir figure). La dénivellation entre la surface libre du réservoir amont et l'injecteur est notée h. Le jet d'eau, sortant de l'injecteur, supposé cylindrique de rayon r (section S), de débit Q_V, entraîne ainsi la roue en rotation sur son axe. L'ensemble de l'installation, à partir de la sortie de l'injecteur, est baigné par la pression atmosphérique P_a. Par souci de simplification, on prendra $P_a=0$.

On notera ω la vitesse angulaire de la roue et R le rayon moyen de cette même roue au niveau des augets. On supposera que l'auget provoque une déviation du jet d'eau d'un angle β entre l'entrée et la sortie, comme l'indique la figure.



On désignera par $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{y})$ la base des coordonnées cylindriques.

On considérera que le rayon r *du jet est faible devant le rayon* R, *c'est à dire qu'aucune variation sur le diamètre du jet ne sera considérée.*

On désigne par $\vec{V}_1$ *la vitesse absolue du fluide en entrée de roue mobile par rapport au sol fixe.* $\vec{V}_2$ *désigne la même quantité en sortie et* $\vec{U}$ *la vitesse tangentielle de la roue au niveau de l'auget.*

Soit $\vec{W}_1$ la vitesse relative du fluide par rapport à la roue mobile en entrée et $\vec{W}_2$ la vitesse relative du fluide par rapport à la roue mobile en sortie.
L'étude sera menée dans un référentiel lié à l'auget, qui sera considéré comme galiléen. Ce référentiel sera supposé en translation par rapport au référentiel lié au sol, pendant toute la durée de l'impact du jet sur l'auget.

On se propose, dans un premier temps, d'étudier le comportement individuel d'un auget.

II-1- En notant ρ la masse volumique de l'eau, déterminer la masse élémentaire dm d'eau admise dans l'auget pendant une durée dt ainsi que le débit volumique Q_{vr} atteignant effectivement l'auget dans son mouvement.

II-2- On cherche à appliquer le théorème du moment cinétique à la masse de fluide dm transitant par la roue mobile pendant la durée dt. Pour cela, on utilisera la base des coordonnées cylindriques.

Dans toute la suite du problème, on négligera les dimensions de l'auget par rapport à celle de la roue.

II-2-1- Appliquer la relation de composition des vitesses afin de déterminer $\vec{V}_1$ en fonction de $\vec{W}_1$ et $\vec{U}$ puis ensuite $\vec{V}_2$ en fonction de $\vec{W}_2$ et $\vec{U}$.

II-2-2- Ecrire le moment cinétique au centre de la roue de la masse dm entrant dans l'auget en fonction de dm, R, du vecteur unitaire $\vec{U}_r$ et de la vitesse relative $\vec{W}_1$. On laissera l'expression sous la forme d'un produit vectoriel.
On effectuera le même travail en sortie de l'auget. Le moment cinétique sera exprimé en fonction de dm, R, $\vec{U}_r$, et de la vitesse relative $\vec{W}_2$. On laissera également l'expression sous forme d'un produit vectoriel.

II-2-3- Après avoir énoncé le théorème du moment cinétique, montrer que le couple $\vec{C}$ exercé par le fluide sur la roue est donné par :

$$\vec{C} = \rho Q_{VR} R \vec{U}_r \wedge (\vec{W}_2 - \vec{W}_1)$$

II-2-4- En considérant le fluide dans son mouvement relatif par rapport à l'auget, montrer que

$$\left\|\vec{W}_1\right\| = \left\|\vec{W}_2\right\|$$

Exprimer ensuite les produits vectoriels et montrer que le couple exercé par le fluide sur l'auget est donné par :

$$\vec{C} = \rho RS(-U + V_1)^2 (1 - \cos\beta)\vec{y}$$

où S est la section droite du jet incident. On prendra soin de justifier le signe de $\vec{C}$.

II-2-5- En déduire la puissance mécanique P_m cédée par le fluide à la roue mobile.

II-2-6- Déterminer le module de la vitesse $\vec{V}_1$ en sortie de l'injecteur en fonction de h, en négligeant les effets de la viscosité du fluide.
On exprimera ensuite la puissance hydraulique P_h disponible sur cette chute d'eau, notamment en fonction de h et du débit Q_V.

II-3- On appelle rendement hydraulique η de la turbine le rapport entre la puissance hydraulique cédée par le fluide à la turbine et la puissance hydraulique disponible. Ces puissances sont prises en valeurs absolues.

- Exprimer η exclusivement en fonction de $\cos\beta$ et x, où x désigne le rapport U/V_1.
- Quelles sont les conditions à appliquer sur x et sur β pour que ce rendement soit alors maximum ?
- Que vaut alors ce rendement maximum ?

En réalité, la roue Pelton comporte une multitude d'augets (une trentaine en général). Les augets se succèdent donc régulièrement dans une même zone. On peut ainsi considérer que tout le débit Q_V du jet incident est capté par les augets.

II-4- Justifier rapidement que le couple exercé par le fluide sur l'ensemble de la roue mobile est donné par

$$\vec{C} = \rho Q_V R(-U + V_1)(1 - \cos\beta)\vec{y}$$

II-5- Exprimer de nouveau le rendement hydraulique η en fonction de $\cos\beta$, et x.
- Donner les conditions à appliquer sur x et sur β pour que ce rendement soit alors maximum.
- Que vaut alors ce rendement ?
- Dans la pratique, il n'est pas possible de remplir la condition sur β pour obtenir un rendement maximum. Pourquoi ?
- En réalité, le rendement total de la turbine est nettement inférieur à la valeur trouvée précédente. Essayer d'en donner les raisons.

II-6- Le rendement de la turbine au point nominal de fonctionnement est de 80%. On donne pour ces conditions de rendement

Q_V = 12 m^3/s
N = 208 tours/minute

On prendra R = 1 m et h = 300 m
Calculer la vitesse V_1 en sortie d'injecteur ainsi que la puissance mécanique disponible sur la turbine. Déterminer ensuite la valeur de l'angle β.

III- Etude du démarrage et de l'arrêt de la turbine

La turbine entraîne un alternateur, machine destinée à produire de l'électricité. Cette machine produit ainsi un couple résistant sur l'axe de la roue mobile, lorsqu'elle fonctionne . La masse de l'ensemble mobile est notée M et son moment d'inertie est $I=KMR^2$ (avec K constante inférieure à 1). R désigne comme précédemment le rayon moyen de la roue au niveau des augets.

En l'absence de tout couple résistant, c'est à dire lorsque l'alternateur est déconnecté, la turbine est calculée pour tourner à la vitesse angulaire maximale ω_m , telle que : $V_1=R\omega_m$, point pour lequel le rendement hydraulique est nul.
La turbine est initialement à l'arrêt : à l'instant t=0, on ouvre brutalement les vannes alimentant l'injecteur.

III-1- Donner l'expression du couple moteur C en fonction de ω et ω_m en utilisant l'expression déterminée à la question II-4.
Ecrire ensuite l'équation du mouvement de l'ensemble mobile.

III-2- Montrer que $\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = e^{-\frac{t}{T}}$ où T est une constante de temps que l'on déterminera en fonction de $\cos\beta$, ρ, Q_V, M et K exclusivement.

III-3- Déterminer l'expression du temps t_1 nécessaire à l'ensemble mobile pour atteindre la moitié de la vitesse angulaire maximale ω_m.
Pour l'application numérique, on prendra M=300 tonnes, Q_V=12 m^3/s, K=0,64 et β=165°.

L'alternateur est maintenant mis en marche et le couple résistant ainsi généré fait que la vitesse angulaire de la turbine est $\omega_1=\omega_m/2$.

III-4- Le couple résistant dû au fonctionnement de l'alternateur est brutalement annulé suite à une déficience électrique. La turbine, qui n'est plus freinée par le couple résistant, a donc tendance à s'emballer vers sa vitesse angulaire maximale ω_m.
- Pourquoi avoir choisi le régime de fonctionnement précédemment défini ?
- Déterminer l'expression du temps t_2 au bout duquel la vitesse angulaire est majorée de 50%.
- Quels sont les risques liés à une telle situation ?

III-5- Au temps t_2, la turbine tourne ainsi à une vitesse angulaire ω_2 supérieure de 50 % à la vitesse ω_1. Le débit injecté est alors noté Q_{V0}. Pour éviter l'emballement, l'ingénieur responsable du site envisage de fermer la vanne d'alimentation de l'injecteur. La fermeture d'une telle vanne n'est évidemment pas instantanée, mais doit s'opérer pendant un temps T'.

III-5-1- Déterminer la loi de débit Q_V pendant l'opération de fermeture en fonction de Q_{V0},t, T'. On supposera une loi de fermeture du débit linéaire en fonction du temps.

III-5-2- En s'inspirant de la question III-1, montrer que la nouvelle équation différentielle reliant ω à t s'écrit:

$$\frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = \frac{1}{T}(1 - \frac{t}{T'})dt$$

Intégrer ensuite cette équation différentielle pour déterminer $\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_2}$ en fonction du temps t, de T et de T'.

III-5-3- Quelle sera l'augmentation relative de la vitesse angulaire au bout du temps de fermeture T'. On demande l'expression et l'application numérique avec T'=30s.
Conclure.

Fin de l'énoncé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Bilans macroscopiques et relation de Bernoulli
- Description des fluides : statique, cinématique et viscosité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc