Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2005, filière PC

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : solutions développables en série entière
- Partie II : intégrale elliptique et longueur de l'ellipse
- Partie III : une série de Fourier

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2005/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Session 2005

Les calculatrices sont interdites
***
N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,
à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé,
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
***

Partie I

On considère l'équation différentielle linéaire du 2^e ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathcal{E}_\lambda) : \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

I.1 Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$.
On supposera dans la suite du problème que $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, y désigne une fonction de la variable réelle x, admettant un développement en série entière au voisinage de 0 avec $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

I.2 Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

I.3 1.3.1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pour que l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$?

1.3.2 Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathcal{E}_\lambda)$ de degré d, que nous noterons φ_d, telle que $\varphi_d(0) = 1$.

1.3.3 Expliciter la fonction polynôme φ_1.

1.3.4 Déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c' tels que :

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{(2x+1)^2}$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

I.4 On se place dans le cas où $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{N}$.

I.4.1 On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{E}_\lambda)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

I.4.2 Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$, que nous noterons φ_λ, développable en série entière de la variable x sur $]-1,1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0)=1$.

I.4.3 Expliciter les développements en série entière de la variable x des fonctions $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

Partie II

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+x\sin^2 t}\,dt.$$

II.1 Montrer que ψ est définie et continue sur $[-1,+\infty[$.

II.2 Montrer que ψ est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

II.3 II.3.1 Montrer que pour tout $u\in]-1,1[$, on a $\sqrt{1+u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n$.

II.3.2 Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $]-1,1[$ et que l'on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt\right)x^n.$$

II.3.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt$. Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a $I_n=\dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}$.
Calculer I_0. En déduire I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $]-1,1[$.

II.3.4 Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\leq 1$.

II.3.5 Montrer que le développement de ψ en série entière est intégrable terme à terme sur $]-1,1[$, et en déduire que :

$$\int_{-1}^{1}\psi(x)dx=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2$$

II.4 Déduire du développement de ψ en série entière une expression de $\psi(x)$ en fonction de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et de $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.

II.5 Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'ellipse $\mathcal{C}$ paramétré par $t \in [0, 2\pi] \mapsto b\cos t\ \overrightarrow{i} + a\sin t\ \overrightarrow{j}$ où a et b sont des nombres réels donnés tels que $a \geq b > 0$. On note l sa longueur et e son excentricité.
Montrer que $l = \pi a \left[\varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2)\right]$.

Partie III

Soit f la fonction de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x\sin^2 t}\, dx.$$

III.1 Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodique.

III.2 Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}$.

III.3 Montrer que la série de Fourier de f est de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}\cos 2nt.$$

où $a_0, a_2, ..., a_{2n}, ...$ sont des nombres réels que l'on ne cherchera pas à calculer. Préciser pourquoi la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier.

III.4 A l'aide du résultat de la question II.3.5, donner une expression de a_0 sous la forme de la somme d'une série numérique.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Équations différentielles linéaires
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
- Suites et séries de fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc