Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2011, filière PC

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : droites des moindres carrés pour trois points
- Partie II : résultats dans un espace préhilbertien réel
- Partie III : base adaptée à un produit scalaire
- Partie IV : droites des moindres carrés dans le cas général

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années : prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2011/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Notations et définitions

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ le plan muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ avec $O = (0,0)$, $\mathbf{i} = (1,0)$ et $\mathbf{j} = (0,1)$. La norme associée au produit scalaire canonique sera notée $\|\cdot\|_2$ si bien que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

Pour a et b deux réels donnés, on définit $\mathcal{D}_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = ax + b$.

Si $M \in \mathcal{P}$ a pour coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$, on note $p_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même abscisse x que M.

On définit aussi $\mathcal{D}'_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $x = ay + b$, et $p'_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}'_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même ordonnée y que M.

PARTIE I : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS UN CAS PARTICULIER

Soient A, B et C les trois points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement : $(0,0)$, $(0,1)$ et $(\alpha, \frac{1}{2})$ où α désigne un réel non nul.

On définit deux applications f_0 et f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a,b) = \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(A)A}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(B)B}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(C)C}\right\|_2^2,$$

$$f_1(a,b) = \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(A)A}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(B)B}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(C)C}\right\|_2^2.$$

I.1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

I.2.

I.2.a. Montrer que $f_0(a,b) = b^2 + (b-1)^2 + \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2$.

I.2.b. Vérifier que $f_0(a,b) = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

I.2.c. En déduire que la fonction f_0 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels $(a,b) = (0, \frac{1}{2})$ correspondant à la droite, notée $\mathcal{D}_0$, d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = \frac{1}{2}$.

I.3.

I.3.a. Déterminer l'expression explicite de $f_1(a,b)$ en fonction de a, b et α.

I.3.b. Montrer que $f_1(a,b) = 3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2$.

I.3.c. En déduire que la fonction f_1 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels, noté (a_1, b_1), à déterminer. On note alors $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $x = a_1 y + b_1$.

I.4. Montrer que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales et se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de (A, B, C).

PARTIE II : RÉSULTATS SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

Soit E un espace préhilbertien réel non réduit à $\{0\}$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

II.1. Donner la définition de $F^\perp$. Énoncer (sans démonstration) une propriété vérifiée par F et $F^\perp$ valable en général. Dans le cas où E est de dimension finie, que peut-on dire de plus ?

Pour $\mathbf{x} \in E$, on note $p_F(\mathbf{x})$ la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur F.

II.2. Démontrer que $\inf_{\mathbf{z}\in F} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ est bien défini et que cette borne inférieure est atteinte en un unique élément $\mathbf{z}$ de F défini par $\mathbf{z} = p_F(\mathbf{x})$.

Cette borne inférieure est notée $d(\mathbf{x}, F)$. On a donc $d(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x})\|$.
On dit qu'une application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un **produit subordonné à** F si elle vérifie les 4 propriétés suivantes :

i) $\forall \mathbf{x} \in E$, l'application $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ est une forme linéaire sur E ;
ii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{y}|\mathbf{x})_F$;
iii) $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \mathbf{y} \in F$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = 0$;
iv) $\forall \mathbf{x} \in F^\perp$, $\forall \mathbf{y} \in F^\perp$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$.

II.3.

II.3.a. Montrer que si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ est un produit subordonné à F, alors :
- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x})|\mathbf{y} - p_F(\mathbf{y}))$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F = (d(\mathbf{x}, F))^2$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F \geqslant 0$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F = 0 \iff \mathbf{x} \in F$.

II.3.b. Vérifier qu'il existe un unique produit subordonné à F.

On note alors $(\cdot|\cdot)_F$ ce produit subordonné à F et pour $\mathbf{x} \in E$, on pose $\|\mathbf{x}\|_F = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F}$.

II.4. Montrer que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| \leqslant \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$; à quelle condition sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ peut-on dire que : $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| = \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$?

II.5.

II.5.a. Montrer l'existence d'un élément de E, noté $\mathbf{u}$, tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On note alors $D = \text{Vect}(\mathbf{u})$ la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{u}$ et p_D la projection orthogonale sur D.

II.5.b. Vérifier que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $p_D(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{u})\mathbf{u}$.

Pour tout élément $\mathbf{x} \in E$, on pose $m_\mathbf{x} = (\mathbf{x}|\mathbf{u})$, $\sigma_\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_D$.

Pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, on pose $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y})_D$.

II.5.c. Montrer que $\sigma_\mathbf{x} = \|\mathbf{x} - m_\mathbf{x}\mathbf{u}\|$ et que $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) - m_\mathbf{x} m_\mathbf{y}$.

On suppose dans la suite de cette partie que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux éléments de E tels que la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ soit libre.

II.6. Montrer que $\sigma_\mathbf{x}$ et $\sigma_\mathbf{y}$ sont deux réels strictement positifs.

On pose alors $\mathbf{x}^* = \dfrac{\mathbf{x} - m_\mathbf{x}\mathbf{u}}{\sigma_\mathbf{x}}$, $\mathbf{y}^* = \dfrac{\mathbf{y} - m_\mathbf{y}\mathbf{u}}{\sigma_\mathbf{y}}$ et $\rho = \dfrac{\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}}$.

II.7.

II.7.a. Montrer que $m_{\mathbf{x}^*} = 0$, que $\sigma_{\mathbf{x}^*} = 1$ et que $\rho \in]-1, 1[$.

II.7.b. Vérifier alors que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$ est une base orthonormale de $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$.

II.7.c. Montrer que $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|$ est bien défini et vaut $d(\mathbf{y}, F)$.

II.7.d. Établir que $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - m_\mathbf{y}\mathbf{u} - (\mathbf{y}|\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*\|$.

II.7.e. Vérifier que $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \sigma_\mathbf{y}\|\mathbf{y}^* - \rho\mathbf{x}^*\|$.

II.7.f. Déterminer, en fonction de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}$, l'unique couple de réels (a_0, b_0) tel que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - a_0\mathbf{x} - b_0\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_0$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $y = a_0 x + b_0$.

II.8. Montrer que $\mathcal{D}_0$ a pour équation dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{y - m_\mathbf{y}}{\sigma_\mathbf{y}} = \rho \cdot \dfrac{x - m_\mathbf{x}}{\sigma_\mathbf{x}}$.

II.9. Montrer de même qu'il existe un unique couple de réels (a_1, b_1) tel que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x} - a_1\mathbf{y} - b_1\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_1$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $x = a_1 y + b_1$.

II.10. Montrer que $\mathcal{D}_1$ a pour équation dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{x - m_\mathbf{x}}{\sigma_\mathbf{x}} = \rho \cdot \dfrac{y - m_\mathbf{y}}{\sigma_\mathbf{y}}$ avec le même réel ρ défini précédemment.

II.11. Vérifier que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées dans $\mathcal{R}$: $(m_{\mathbf{x}}, m_{\mathbf{y}})$.

II.12. Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = m_{\mathbf{x}} m_{\mathbf{y}}$.

PARTIE III : BASE ADAPTÉE À UN PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

Soit E_n un espace euclidien de dimension n avec $n \geqslant 1$.

On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur E_n et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n. Pour tout élément $\mathbf{z} \in E_n$, on notera $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$ la matrice de $\mathbf{z}$ dans la base $\mathcal{B}$, et on posera $Z = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$. Ainsi Z est la matrice-colonne à n lignes donnée par la relation $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{e}_i$.

III.1. Vérifier que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = {}^tXSY$ si $X = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$, $Y = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{y})$ et $S = \Big((\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$.

On dit alors que S est **associée** à $\mathcal{B}$.

III.2.

III.2.a. Vérifier que si S est associée à $\mathcal{B}$, alors S est une matrice carrée symétrique réelle d'ordre n et que le spectre de S dans $\mathbb{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

III.2.b. À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice S associée à $\mathcal{B}$ est-elle diagonale ?

III.3. On considère deux matrices A et B carrées d'ordre n telles que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAY = {}^tXBY$. Montrer que $A = B$.

Notons $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ une base de E_n et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

III.4.

III.4.a. Pour $\mathbf{x} \in E_n$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$. Donner la relation entre X, X' et P.

III.4.b. On note $S' = \Big((\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j)\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $X' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$ et $Y' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{y})$, donner l'expression de $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ en fonction de X', Y' et S'. En déduire que $S' = {}^tPSP$.

III.4.c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E_n telle que, pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \qquad \text{si} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}'_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \mathbf{e}'_i.$$

III.4.d. À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à la base précédente $\mathcal{B}'$ est-elle une matrice orthogonale ?

III.5. Étant donné une matrice $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des réels $(d_1, \ldots, d_n)$ strictement positifs sur la diagonale, M_1 est-elle la matrice associée à une base de E_n ?

III.6. Soit $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormale de E_2 et f_2 l'endomorphisme de E_2 dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_2.

III.6.a. Déterminer le spectre de f_2 et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de f_2.

III.6.b. M_2 est-elle la matrice associée à une base de E_2 ?

III.7. Soit $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormale de E_3.
On note f_3 l'endomorphisme de E_3 dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_3.

III.7.a. Déterminer le spectre de f_3 et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de f_3.

III.7.b. M_3 est-elle la matrice associée à une base de E_3 ?

III.8. $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice associée à une base de E_4 ?

On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ d'éléments de E_n est **adaptée** si les conditions suivantes sont remplies :

- pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = 0$ si $i \neq j$;
- pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\qquad (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i) = \dfrac{1}{n}$.

III.9.

III.9.a. Montrer qu'une famille adaptée est une base de E_n.

III.9.b. Montrer l'existence d'une base adaptée.

III.9.c. E_n admet-il une unique base adaptée ?

III.9.d. On suppose que $\mathcal{B}$ est une base adaptée. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, déterminer l'expression de $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ en fonction des coordonnées de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$.

III.9.e. Calculer alors la norme du vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$.

PARTIE IV : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS LE CAS GÉNÉRAL

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère $A_1, \ldots, A_n$, n points distincts du plan $\mathcal{P}$ qui ne sont pas alignés.
On note $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ leurs coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$.
On définit deux applications f_0 et f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{p_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2 \qquad \text{et} \qquad f_1(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{p'_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2 .$$

IV.1. Donner un exemple d'espace préhilbertien réel de dimension infinie, puis un exemple d'espace euclidien de dimension n (dans les deux cas, on donnera l'expression du produit scalaire).

On considère dans toute la suite du problème un espace euclidien E_n de dimension n, dont le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$.

IV.2. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E_n telle que :

$$\forall (\mathbf{z}, \mathbf{t}) \in E_n^2, \qquad (\mathbf{z}|\mathbf{t}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i t_i \qquad \text{si} \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{e}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{e}_i.$$

On pose $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$, si bien que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On définit alors, à partir des points $A_1, \ldots, A_n$, deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans E_n en posant : $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$.

IV.3. Montrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille libre de E_n.

IV.4. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_0(a, b) = n\|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|^2$ et $f_1(a, b) = n\|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\|^2$.

IV.5.

IV.5.a. En déduire que f_0 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ qui est atteint en un unique couple de réels, noté (a_0, b_0), et qu'il en est de même de f_1 avec un unique couple de réels noté (a_1, b_1).

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit alors les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = a_0 x + b_0$ et $x = a_1 y + b_1$. On les appelle **les droites des moindres carrés** associées à $A_1, \ldots, A_n$.

IV.5.b. Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de $(A_1, \ldots, A_n)$.

IV.5.c. À quelle condition sur les $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont-elles orthogonales ? Donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

IV.5.d. Donner un exemple de quatre points distincts et non alignés $A_1, \ldots, A_4$ de $\mathcal{P}$ tels que les droites des moindres carrés $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ associées à $A_1, \ldots, A_4$ soient orthogonales et donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc