Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2016, filière PC

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : géométrie
- Partie 2 : algèbre linéaire et probabilités
- Partie 3 : analyse et probabilités
- Partie 4 : intégrales
- Partie 5 : séries de fonctions

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2016/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

On propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés "polynômes de Bernstein".

Dans la partie 1, on considère des exemples de courbes dont le paramétrage fait intervenir des polynômes de Bernstein dans des cas simples. Dans la partie 2, on s'intéresse à deux endomorphismes φ_n et B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés sont liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale permet de faire le lien avec l'endomorphisme B_n dont on étudie en détail la restriction à $\mathbb{R}_2[X]$. On étudie, dans la partie 3, les aspects analytiques de $B_n(f)$ pour une fonction f définie sur $[0,1]$ avec B_n défini sur le modèle de la partie 2. Par l'usage des probabilités, on obtient une démonstration "naturelle" de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0,1]$ sous l'hypothèse forte que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. La partie 4 complète la partie 3 par l'étude d'intégrales impropres et d'intégrales à paramètres. La partie 5 aborde la question des séries de fonctions liées aux polynômes de Bernstein.

Les parties 1 et 5 sont indépendantes des autres parties. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et cela uniquement par la question 5 faisant intervenir les probabilités. La partie 4 dépend seulement de la partie 3 et uniquement par la question 11.d).

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$ et $A_2 = (1,0)$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x + y \geqslant 1\}$.

Pour $t \in [0,1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1$, $B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2$ et $C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t)$.

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t.

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t) A_k$.

2. Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $\mathscr{C}$ l'arc paramétré défini à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} t & \longmapsto & C(t) \\ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2. \end{array}$

3.a) Justifier que tous les points de $\mathscr{C}$ sont dans $\mathcal{T}$.

3.b) Pour $t \in [0,1]$, déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{D}_t$ à $\mathscr{C}$ en $C(t)$.

3.c) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, le segment $[A(t), B(t)]$ est inclus dans $\mathscr{D}_t$.

3.d) Représenter dans un même repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$, la partie $\mathcal{T}$ et les segments $[A(t), B(t)]$ pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.

PARTIE 2. ALGEBRE LINEAIRE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $P(X)$ un polynôme réel, on note $P'(X)$ le polynôme dérivé.

On note $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \ldots, p_{n,n}(X))$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

et

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

4.

4.a) Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k\, p_{k,n}(X)$.

4.c) En déduire que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n est diagonalisable.

4.d) Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et T_r une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r, t)$. On note $\overline{T}_r = T_r/r$.

Pour Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbf{E}(Y)$ l'espérance de Y et $\mathbf{V}(Y)$ la variance de Y.

On rappelle que si $Y(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$ et h est une fonction à valeurs réelles définie sur $[\![0, r]\!]$, alors $h(Y)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(h(Y)) = \sum_{k=0}^{r} h(k)\mathbf{P}(Y = k)$.

5.a) Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r, t)$.

5.b) Donner $T_r(\Omega)$ et justifier que, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, on a : $\mathbf{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

5.c) Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$\mathbf{E}(T_r),\ \mathbf{E}(\overline{T}_r),\ \mathbf{V}(T_r),\ \mathbf{V}(\overline{T}_r),\ \mathbf{E}(T_r^2) \text{ et } \mathbf{E}((\overline{T}_r)^2)\ ;$$

vérifier en particulier que $\mathbf{E}((\overline{T}_r)^2) = \dfrac{t}{r} + \dfrac{t^2}{r}(r-1)$.

5.d) En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1, \qquad \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t.$$

5.e) Montrer que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par B_n.

On note $\tilde{B}_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\tilde{B}_n(P) = B_n(P)$. On note A_n la matrice de $\tilde{B}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note aussi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H$.

8.

8.a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

8.b) Soit a et b deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible.

8.c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b tels que $H = QDQ^{-1}$.

9. On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, notée (M_ℓ), converge vers une matrice M, on note $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on a : $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

9.a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n) = I_3$.

9.b) Montrer que l'application ψ définie sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

9.c) En déduire que si $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$, alors $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

9.d) Montrer que $A_n = QD_nQ^{-1}$.

9.e) Déterminer explicitement, pour $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{\ell \to +\infty} (A_n^\ell)$.

9.f) Déterminer explicitement $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n^n)$.

PARTIE 3. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = \mathbf{E}(f(t) - f(\overline{T}_n)) = \sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 5.

10.

10.a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète Y admettant une variance, on a l'inégalité suivante : $\mathbf{E}(Y) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$.

10.b) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|) \leqslant \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$.

11. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

11.a) Justifier l'existence d'un réel M_f tel que : $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $|f(a) - f(b)| \leqslant M_f |a-b|$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \quad |f(a) - f(b)| \leqslant M_f |a-b|.$$

11.b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbf{E}(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leqslant M_f \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}}$.

11.c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leqslant \dfrac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

11.d) Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

PARTIE 4. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

On reprend les notations de la partie 3 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 11.d).

12. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_0^1 B_n(f)(x)\, \mathrm{d}x \right) = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

13. On note $S_n(f) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

13.a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^a (1-x)^b\, \mathrm{d}x = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1}\, \mathrm{d}x$.

13.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, le réel $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\, \mathrm{d}x$ est indépendant de l'entier k et que $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)}$.

13.c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

14. Montrer que le résultat de la question 13.c) reste vrai pour la seule hypothèse que f est continue sur $[0,1]$.

15. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a+b \leqslant c-2$.

15.a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

15.b) Montrer que, pour $b \geqslant 1$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

15.c) Montrer que la fonction $\begin{array}{ccc} h : & t & \longmapsto & \dfrac{t}{1-t} \\ & [0,1[& \longrightarrow & [0,+\infty[\end{array}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est strictement croissante et bijective.

15.d) En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$, calculer $F(0)$; en déduire la valeur de $F(1)$.

PARTIE 5. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si } n \geqslant k, \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \qquad \text{si bien que} \qquad f_n(t) = \begin{cases} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} & \text{si } n \geqslant k, \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

16. Montrer que $\binom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire, pour tout $t \in]0,1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

17. Etablir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

18. Déterminer $S(t)$ pour $t = 0$ et pour $t = 1$.

19.

19.a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$.

19.b) En déduire que, pour tout $u \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$.

19.c) Montrer que, pour tout $t \in]0,1]$, $S(t) = \dfrac{1}{t}$.

19.d) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Variables aléatoires discrètes
- Espaces vectoriels normés
- Suites et séries de fonctions
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Techniques fondamentales de calcul en analyse



Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc