Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2017, filière PC

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude d'un cas simple
- Partie II : séries entières
- Partie III : étude d'un cas intermédiaire
- Partie IV : algèbre linéaire
- Partie V : étude d'un dernier cas

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2017/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES

Mardi 2 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.

Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

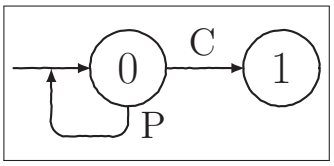


Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \quad G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n) t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[, \quad G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

Q3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'_Y(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''_Y(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

Q4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$.

Q5. Montrer que $\sum u_n(a) z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a) u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

Q7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

Q8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

Q11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

Partie III - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

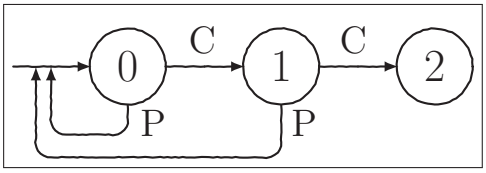


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

Q12. Calculer p_1, p_2 et p_3.

Q13. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

Q14. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q15. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q16. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q17. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q19. Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q20. Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q21. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q22. Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie **I**.

Q23. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie IV - Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A, si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $A - tI_4$.

Q24. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q25. Trouver les réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Q26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q27. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t)$.

Q28. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q29. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S.

Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note U_k la k-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t).

Q30. Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

Q31. En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q32. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A. On note λ une valeur propre complexe non nulle de A.

Q33. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A.

Q34. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathscr{H}) \quad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathscr{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q35. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

Q36. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3).$$

Q37. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$$\mu \neq 0, \qquad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c| \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c).$$

Partie V - Étude d'un dernier cas

Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Q38. Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie **V**.

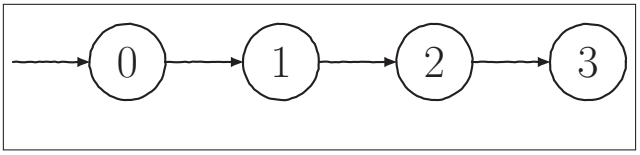


Figure 3

Pour $i \in [\![0, 3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n-ième lettre, l'automate se trouve au niveau i » et $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau i ». On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note T l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de T (notée G_T) est alors S_3 et on note R_T son rayon de convergence. On rappelle que $R_T \geqslant 1$.

Q39. Déterminer $p_{0,0}, p_{0,1}, p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

Q40. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\{ \begin{array}{lcllll} p_{n,0} & = & p \cdot p_{n-1,0} & + & p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} & = & q \cdot p_{n-1,0} & + & q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} & = & p \cdot p_{n-1,1} & & \\ p_{n,3} & = & q \cdot p_{n-1,2} & & \end{array} \right.$.

Soit $t \in [-1, 1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

Q41. Montrer que $\left\{ \begin{array}{lcllll} S_0(t) & = & tp \cdot S_0(t) & + & tp \cdot S_2(t) & +1 \\ S_1(t) & = & tq \cdot S_0(t) & + & tq \cdot S_1(t) & \\ S_2(t) & = & tp \cdot S_1(t) & & & \\ S_3(t) & = & tq \cdot S_2(t) & & & \end{array} \right.$.

Q42. Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie **IV**.

Q43. Montrer que $\forall t \in]-R_T, R_T[,\ G_T(t) = \dfrac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$ et montrer que $R_T > 1$.

Q44. Montrer que T admet une espérance et une variance.

Q45. Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de q seulement.

Q46. Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC : on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce problème.

FIN

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires discrètes
- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles
- Espaces probabilisés
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc