Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2019, filière PC

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Parties I et II : expérience de Rutherford et limites du modèle planétaire
- Partie III : postulats de Bohr
- Parties IV et V : expérience de Stern et Gerlach et effet Zeeman
- Partie VI : orbitales atomiques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2019/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

PHYSIQUE

Mardi 30 avril : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Les six parties de ce problème peuvent être traitées séparément.

Leurs poids respectifs sont approximativement de :

24 % pour la **partie I**

13 % pour la **partie II**

13 % pour la **partie III**

21 % pour la **partie IV**

16 % pour la **partie V**

13 % pour la **partie VI**

PROBLÈME
De l'évolution du concept d'atome au cours du XX^{e} siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^{e} siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome. Dans la **partie I**, on s'intéressera à l'expérience de *E. Rutherford*, qui conduisit à abandonner le modèle de *J. J. Thomson* au profit de celui de *J. Perrin*. Les limites de ce modèle feront l'objet de la **partie II**, limites qui seront partiellement levées dans la **partie III** avec les postulats de *N. Bohr*. L'expérience historique de *O. Stern* et *W. Gerlach*, décrite dans la **partie IV**, apportera la preuve de l'existence d'un moment magnétique propre de l'électron. On verra dans la **partie V** de quelle manière l'interprétation première de cette expérience a été mise en défaut avec l'effet Zeeman. C'est finalement la mécanique quantique qui apporte à ce jour la description la plus complète de l'atome : la **partie VI** étudiera le mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène à partir de l'équation de *E. Schrödinger*.
Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Le rotationnel d'un champ $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$ a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}.$$

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s
Charge électrique élémentaire	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
Electronvolt	$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Partie I - Limite du modèle de *J. J. Thomson* à travers l'expérience de *E. Rutherford*

En 1898, *J. J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car *J. J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^{4}_{2}He$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J. J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J. J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O, origine d'un repère cartésien orthonormé $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$. Nous considérons qu'à l'instant initial t = 0 s, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2.e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\vec{v_0} = \vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \vec{e_x}$. On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (**figure 1**). À chaque instant t, on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O. La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = d(t) \cdot \vec{e_r}$, avec $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z}\right)$ une base cylindrique locale directe.
Au plus proche du point O, la particule alpha est au point S, la distance minimale en ce point est notée d_m. La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.

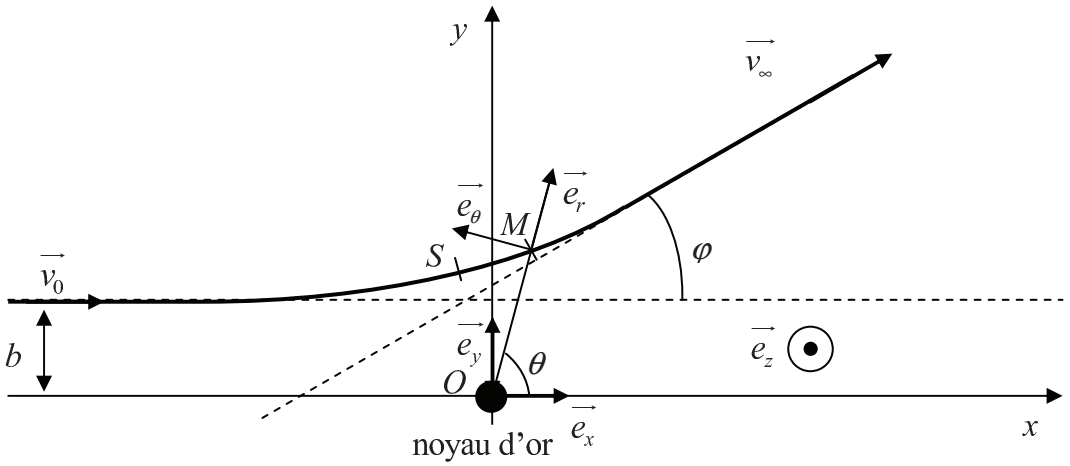


Figure 1 – Expérience de *Ernest Rutherford*

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e, Z, d, ε_0 et $\vec{e_r}$. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d\to+\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e, Z, d et ε_0. Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \dfrac{Z \cdot e^2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}$ et d.

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique $\vec{L_O}$ par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

Q3. Déterminer, en fonction de m_α et v_0, l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Q4. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$, en fonction de b, m_α, v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$. Pour cela, vous pourrez calculer $\overrightarrow{L_O}$ en M_0, position initiale de la particule alpha telle que $\overrightarrow{OM_0} = X\cdot\overrightarrow{e_x} + b\cdot\overrightarrow{e_y}$.

Q5. Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en fonction de $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$, m_α, d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.

En déduire une relation entre d, b, $\dot{\theta}$ et v_0.

Q6. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$, de norme v_S, de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{OS}$, de norme d_m. Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K, b, m_α et v_0.

Q7. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b. Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K, d, m_α, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{e_r}$. Projeter le P.F.D. sur l'axe des x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x, et l'angle θ (**figure 1**, page 3).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x, θ, $\dot{\theta}$, K, b, m_α et v_0.

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \to \infty$. On remarquera que $\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{K}{b\cdot m_\alpha\cdot v_0^2}$.

On rappelle que : $\cos\varphi - 1 = -2\cdot\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin\varphi = 2\cdot\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Q8. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

Q9. Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \dfrac{K}{m_\alpha\cdot v_0^2}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

Q10. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ, la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K, m_α et v_0.

Q11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau.
Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m.

Q12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie II - Limite du modèle planétaire

Le modèle de *J. J. Thomson* est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.
Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (**figure 2**). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C. Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C.

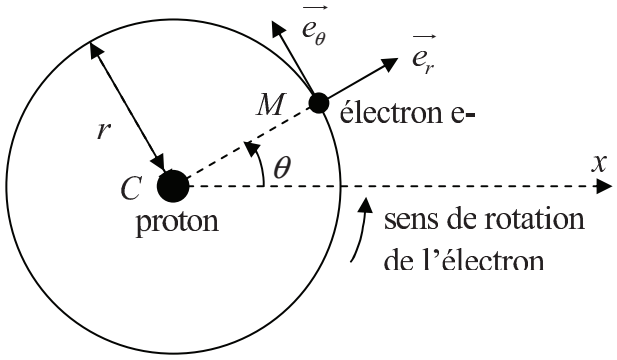


Figure 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ (**figure 2**). $\vec{e_\theta}$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e_r}$ et l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM}\right)$.

Q13. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'électron en fonction de e , m_e, ε_0 , r et d'un vecteur unitaire.

Q14. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A \cdot f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e, ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.

Q15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 \cdot e^2 \cdot r^2}{12 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \cdot \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

Q16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.

Q17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R. Donner l'expression, en fonction de P_0, R et A, du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.

On donne $R = 1{,}0.10^{-10}$ m, calculer t_f. Commenter le résultat obtenu.

Partie III - Postulats de *N. Bohr*

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par *Niels Bohr*. En 1913, ce dernier postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

Vous considérerez qu'un électron sur une orbite de rayon r possède une vitesse $v = \frac{e}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r}}$

et une énergie mécanique $E_M = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$.

Q18. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$.

Préciser l'expression de r_0 en fonction de ε_0, h, m_e et e. Calculer la valeur de r_0.

Q19. En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite, établir une relation entre la longueur d'onde de *De Broglie* de l'électron λ et le périmètre $\mathcal{P}$ de son orbite.

Montrer qu'on retrouve alors le postulat mécanique de *N. Bohr*.

Q20. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$.

Préciser l'expression de E_0 en fonction de ε_0, h, m_e et e. Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0. Que représente physiquement E_0 ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

Q21. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de *Rydberg* - *Ritz* : $\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$ avec $n_i > n_f$. R_H est la constante de *Rydberg*.

Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0, h et c. Indiquer sa valeur et son unité.

Q22. Les raies de la série de *Lyman* sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K (n_f = 1). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : λ_1 = 121,5 nm ; λ_2 = 102,5 nm ; λ_3 = 97,2 nm.

À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de *Rydberg*. Conclure.

Partie IV - Expérience de *O. Stern* et *W. Gerlach*

En février 1922, *Otto Stern* et *Walther Gerlach* firent la découverte fondamentale de la quantification spatiale des moments magnétiques des atomes. Ce résultat est à l'origine de développements physiques et techniques importants du XX^e siècle, comme la résonance magnétique nucléaire, l'horloge atomique ou le laser. Pour cette découverte, *Otto Stern* reçut le prix Nobel en 1943.

Le dispositif mis en œuvre est représenté en **figure 3**, page 8. Il y règne un vide poussé. Les atomes d'argent émergent d'un four pour traverser un collimateur, à la sortie duquel seuls les atomes se propageant selon l'axe (Ox) sont sélectionnés. Ces atomes passent ensuite entre les pôles d'un aimant dont la forme a été choisie pour que le champ magnétique n'y soit pas uniforme.

Les lignes de champ magnétique sont représentées en **figure 4**, page 8. Ce champ possède une composante B_z intense, une composante B_y moins élevée et nulle au centre, et une composante B_x nulle.

Puisqu'un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m}$, situé en un point M où règne un champ magnétique stationnaire $\vec{B}(M)$, subit une force $\vec{F} = \left(\vec{m} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{B}(M)$, le jet atomique est alors dévié. En sortant de l'entrefer, il continue en ligne droite jusqu'à un écran où sont repérés les impacts des atomes. Il est à noter que les atomes d'argent possèdent un seul électron de valence ce qui fait que, pour l'expérience considérée, ils se comportent de la même façon que des atomes d'hydrogène.

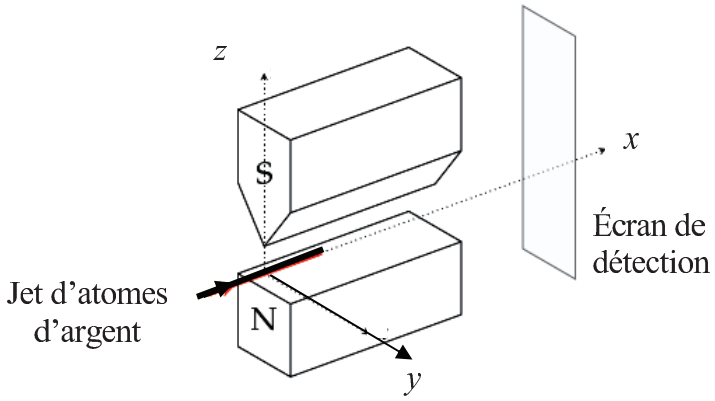


Figure 3 – Dispositif de l'expérience de *Stern* et *Gerlach*

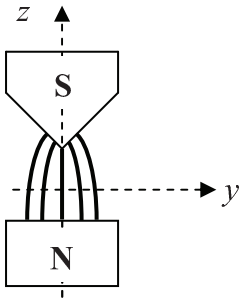


Figure 4 – Lignes de champ magnétique dans l'entrefer

La **sous-partie IV.1** traite de généralités qui ont pour objectif d'aboutir, en fin de la question **Q25**, à l'expression de la pulsation de Larmor Ω_L. Cette dernière devra être utilisée pour répondre à la question **Q30** de la **sous-partie IV.2.** En dehors de ceci, les **sous-parties IV.1** et **IV.2** sont indépendantes.

IV.1 - Généralités

Q23. Considérons l'électron de l'atome d'hydrogène décrivant un mouvement circulaire uniforme sur son orbite comme indiqué en **figure 5**, page 9. Donner l'expression du moment magnétique $\vec{m}$ associé à la boucle de courant créée par le mouvement circulaire de l'électron en fonction de la vitesse de l'électron v, du rayon r de la trajectoire, de la charge électrique élémentaire e et du vecteur unitaire $\vec{e_z}$.

En déduire que ce moment magnétique est lié au moment cinétique orbital $\vec{L}$ en C de l'électron par la relation $\vec{m} = \gamma_e \cdot \vec{L}$ où γ_e est le rapport gyromagnétique classique de l'électron. Exprimer γ_e en fonction de e et m_e.

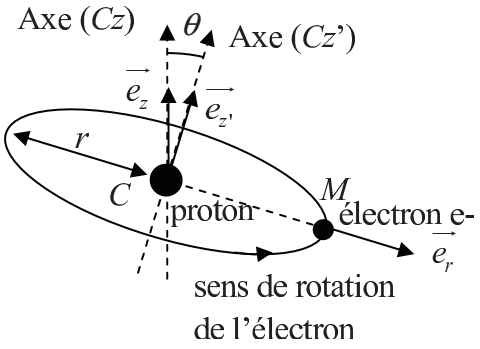


Figure 5 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Q24. Un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m}$ situé en C et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(C)$ subit un moment $\vec{\Gamma}(C) = \vec{m} \wedge \vec{B}(C)$. On considère un champ magnétique orienté selon l'axe (Cz), $\vec{B}(C) = B(C) \cdot \vec{e}_z$ et indépendant du temps. Il y a donc un angle θ entre l'axe qui porte le moment magnétique (Cz') et l'axe (Cz) (**figure 5**).
Déduire du théorème du moment cinétique appliqué en C à l'atome d'hydrogène, que la norme du moment magnétique $\left\|\vec{m}\right\| = m$ et sa composante selon z, $m_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z$, sont indépendantes du temps.

Q25. Un point M décrivant un mouvement circulaire autour d'un axe (Δ), de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_\Delta$ a l'extrémité de son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ qui respecte la relation : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, avec O un point de l'axe (Δ).
Justifier alors que l'extrémité du vecteur $\vec{m}$ tourne autour de l'axe (Cz) en décrivant un cercle à la pulsation de Larmor $\Omega_L = \dfrac{e \cdot B}{2 \cdot m_e}$.

IV.2 - Le dispositif expérimental

Q26. Expliquer la nécessité d'un champ magnétique non uniforme dans l'expérience de *Stern* et *Gerlach*.

Q27. Pourquoi les lignes de champ magnétique présentées en **figure 4** de la page 8 sont-elles cohérentes avec l'énoncé ? Préciser la parité en y de la composante $B_z(y,z)$.

Q28. Puisque la composante $B_z(y,z)$ est une fonction continue et dérivable, sa parité impose la relation suivante : $\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$.
Rappeler, sous leur forme locale, les équations de Maxwell dans le vide. Utiliser l'une d'entre elles pour démontrer que $\left(\dfrac{\partial B_y}{\partial z}\right)_{y=0} = 0$.

Q29. Compte-tenu du résultat précédent, montrer que les atomes d'argent qui passent en $y = 0$ dans l'entrefer y subissent une force d'expression :

$$\vec{F}(x, y=0, z) = m_y \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)_{(x,y=0,z)} \cdot \vec{u_y} + m_z \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_{(x,y=0,z)} \cdot \vec{u_z}\,.$$

Q30. La durée de passage des atomes d'argent dans l'entrefer est d'environ 6 microsecondes. En considérant qu'il règne un champ magnétique d'environ 1 Tesla, justifier quantitativement, à partir de la pulsation de Larmor obtenue à la question **Q23**, que la composante transverse m_y peut être remplacée par sa moyenne temporelle dans l'expression de la force $\vec{F}(x, y=0, z)$ exercée dans l'entrefer sur les atomes d'argent.

Justifier que cette expression se réduit alors à : $\vec{F}(x, y=0, z) = m_z \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_{(x,y=0,z)} \cdot \vec{u_z}\,.$

Q31. À partir de l'étude des lignes de champ magnétique de la **figure 4** de la page 8, justifier que l'atome d'argent soit dévié vers les z positifs lorsque la composante m_z de son moment magnétique est positive.

Q32. Pourquoi, d'un point de vue classique, s'attendrait-on à ce que les impacts des atomes d'argent sur l'écran forment une mince ligne ?

Q33. Ce n'est pas ce que l'expérience a montré. *Stern* et *Gerlach* ont observé deux zones dans lesquelles impactaient les atomes. Le faisceau d'atome incident s'était séparé en deux faisceaux filiformes dirigés, respectivement, vers le haut et vers le bas. Que pouvez-vous en conclure ?

Partie V - L'effet Zeeman normal

L'effet Zeeman désigne généralement l'éclatement spectral des raies spectrales d'un atome quand on le soumet à un champ magnétique. En présence du champ magnétique, chaque raie se décompose en plusieurs raies très voisines, dont l'écart en fréquence par rapport à la raie unique observée en l'absence de champ magnétique est proportionnel au module du champ appliqué lorsqu'il est faible. Les premières observations faisaient état d'une raie en champ nul se décomposant en trois raies très proches : effet Zeeman normal (**figure 6** de la page 11).
Dans cette cinquième partie, seule la question **Q34** traite de l'effet Zeeman normal, les questions **Q35** à **Q45**, indépendantes donc de la **Q34,** portent sur l'interféromètre de Fabry-Pérot utilisé pour sa mise en évidence.

Q34. Avec une lampe à vapeur de cadmium, en l'absence de champ magnétique (**figure 6a**, page 11), la désexcitation des atomes du niveau d'énergie $E_{2(0)}$, vers le niveau d'énergie E_1 s'accompagne de l'émission d'un photon de longueur d'onde λ_0 = 643,8 nm. En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, cette raie se détriple (**figure 6b**, page 11). Dans un modèle très simplifié, on interprète ce phénomène comme le fait qu'il n'y a plus un seul état d'énergie $E_{2(0)}$ mais aussi deux autres états d'énergie $E_{2(0)} + \mu_B \cdot B$ et d'énergie $E_{2(0)} - \mu_B \cdot B$ avec $\mu_B = \frac{e \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot m_e}$.

Donner l'expression de l'écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ entre deux raies consécutives. Effectuer l'application numérique pour un champ magnétique de 1 Tesla.

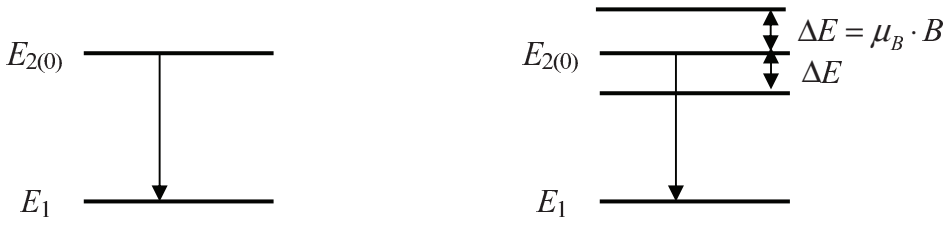


Figure 6a – $\vec{B} = \vec{0}$ **Figure 6b** – $\vec{B} = B \cdot \vec{e_z}$

Figure 6 – Effet Zeeman normal

Pour mesurer ce faible écart entre deux longueurs d'onde, on peut utiliser un interféromètre de Fabry-Pérot. Il s'agit d'un dispositif dans lequel une lame d'air d'indice $n \approx 1$ est enfermée entre deux miroirs semi-réfléchissants identiques, aux faces rigoureusement parallèles et traités pour augmenter leur pouvoir réflecteur. Il est représenté en **figure 7**. Les miroirs sont séparés d'une distance e. Ils ont les mêmes coefficients de réflexion en amplitude r et de transmission en amplitude t.

Tout d'abord, nous supposons que le dispositif est éclairé par un rayon incident, monochromatique, de longueur d'onde λ . Il arrive en O avec un angle d'incidence θ par rapport à la normale aux miroirs et possède une amplitude A_0. L'épaisseur des miroirs est négligeable et nous considérons que les rayons transmis et réfléchis font tous un angle θ par rapport à la normale aux miroirs.

On s'intéresse à l'interférence des rayons émergents à l'infini. Pour observer ces interférences, on les ramène à distance finie en plaçant une lentille convergente de distance focale image f' à la sortie de l'interféromètre.

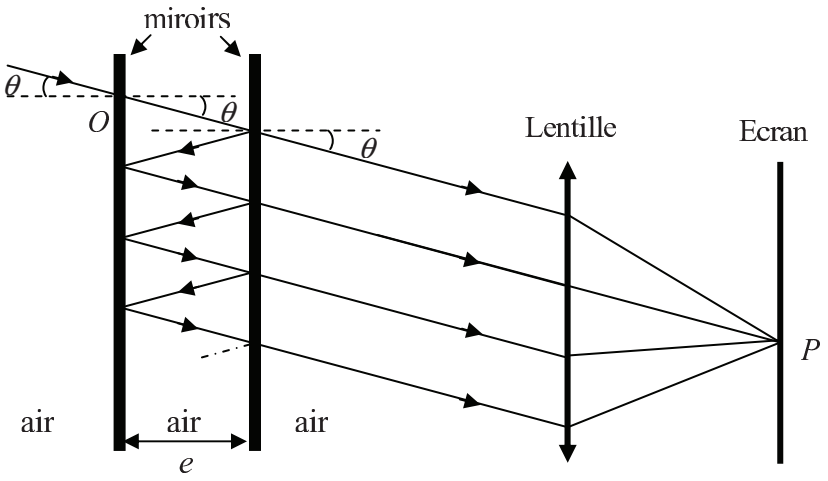


Figure 7 – Interféromètre de Fabry – Pérot

Q35. On appelle δ la différence de marche entre les deux rayons consécutifs 1 et 2 dans la direction θ (**figure 8**). Montrer que $\delta = 2 \cdot e \cdot \cos\theta$. En déduire l'expression de la différence de phase φ associée à δ.

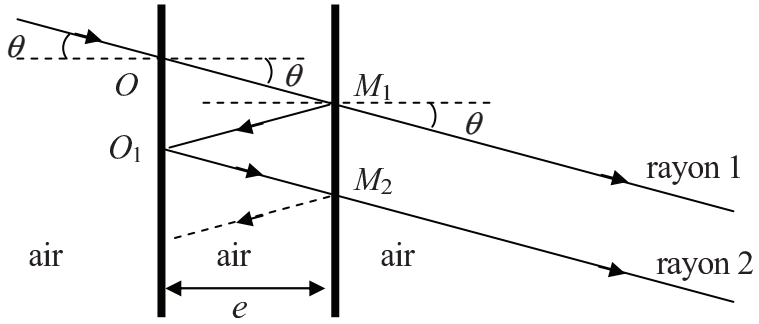


Figure 8 – Différence de marche entre deux rayons consécutifs

Q36. Pour observer la figure d'interférence sur l'écran, comment faut-il placer l'écran par rapport à la lentille ? Quelle figure d'interférence observe-t-on alors ?
Quel autre dispositif permettrait-il d'avoir une figure d'interférence similaire ?

Q37. Pour quelles valeurs de φ l'intensité lumineuse est-elle maximale ?

Nous considérons par la suite que l'expression de l'intensité totale est

$$I_{tot}(\varphi) = I_0 \cdot \frac{1}{1 + m \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

où $m = \frac{4 \cdot r^2}{t^4}$ est le coefficient de finesse de la cavité et I_0 l'intensité du rayon incident d'amplitude A_0. La fonction $I_{tot}(\varphi)$ est appelée fonction d'Airy.

Q38. Donner l'expression du coefficient de finesse *m* en fonction du coefficient de réflexion en énergie *R*.

La largeur totale à mi-hauteur de la fonction d'Airy est notée $\Delta_{\varphi 1/2}$ et vaut : $\Delta_{\varphi 1/2} = \frac{2 \cdot (1 - R)}{\sqrt{R}}$.

Q39. On a tracé, en **figure 9**, 3 courbes (a, b et c) de $\frac{I_{tot}(\varphi)}{I_0}$ pour 3 valeurs de R (0,1 ; 0,5 ; 0,9).

Associer à chacune des courbes a, b et c sa valeur R. Pour observer des franges lumineuses fines sur fond obscur, quelle valeur de R choisiriez-vous ?

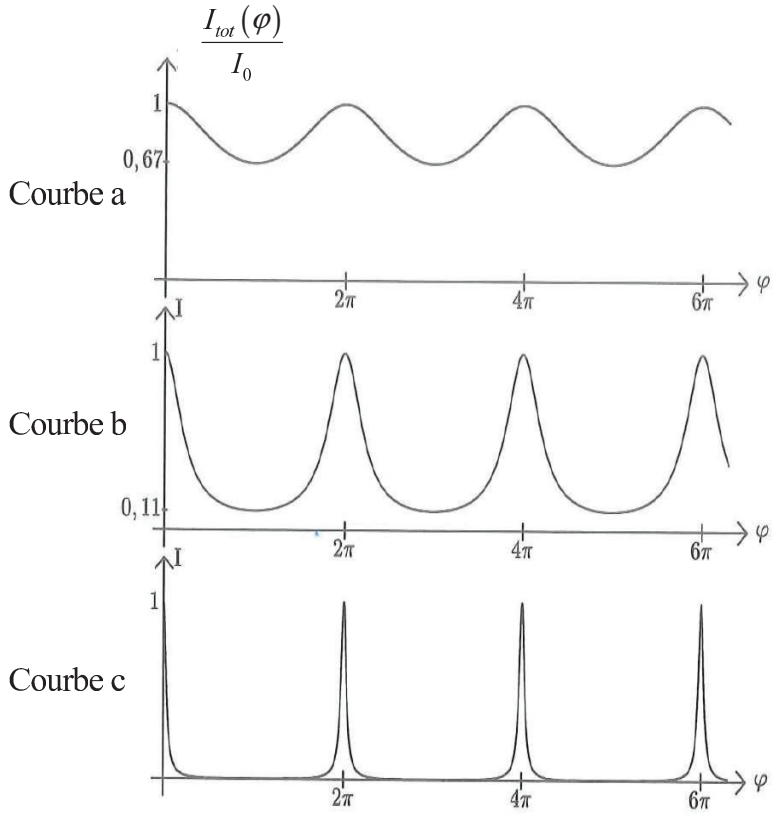


Figure 9 – Courbes de $\frac{I_{tot}(\varphi)}{I_0}$ pour trois valeurs de R

Q40. Justifier physiquement la dépendance de $\Delta_{\varphi 1/2}$ avec R.

Q41. Montrer que l'ordre d'interférence p_0 de la frange centrale est, a priori, quelconque. Qu'est-ce que cela signifie pour son éclairement ?

Q42. On considère les anneaux brillants autres que le disque central. Ces anneaux brillants sont de rayon ρ et on montre que la largeur à mi-hauteur $\Delta_{\rho 1/2}$ de ces anneaux brillants a pour expression : $\Delta_{\rho 1/2} = \Delta_{\varphi 1/2} \cdot \frac{\lambda \cdot f'^2}{4 \cdot \pi \cdot e \cdot \rho}$.

En déduire, en fonction de $\Delta_{\rho 1/2}$, un critère simple qui permettrait de distinguer deux anneaux brillants voisins, de rayons ρ_1 et ρ_2, produits par deux longueurs d'onde proches.

Q43. En notant $\Delta\lambda$ l'écart entre ces deux longueurs d'onde, ce critère se traduit par : $\Delta\lambda \geq \dfrac{\lambda^2}{2 \cdot F \cdot e \cdot \cos\theta}$ avec $F = \dfrac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R}$ la finesse de l'interféromètre de Fabry-Pérot. En considérant un écart entre les miroirs e = 10 mm, un coefficient de réflexion en énergie R = 0,9 et une longueur d'onde de 643,8 nm, calculer l'écart minimal $\Delta\lambda_{min}$ que le Fabry-Pérot permet d'observer sous une incidence nulle. Ce dispositif est-il adapté à l'observation de l'effet Zeeman normal décrit dans le cas d'une lampe au cadmium soumise à un champ magnétique ?

Partie VI - Orbitales atomiques

Les observations expérimentales et leurs interprétations associées, étudiées dans les parties précédentes, ne représentent que quelques uns des faits expérimentaux qui se sont accumulés au début du XX^{e} siècle sans pouvoir être interprétés globalement. Seule la mécanique quantique permit d'acquérir une vision unifiée et cohérente de l'atome.

Dans cette partie, nous allons étudier quelques apports de la physique quantique dans la conception intellectuelle de l'atome. Nous considérons l'électron de l'atome d'hydrogène placé dans le potentiel coulombien $V\left(\vec{r}\right) = -\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r}$. En régime stationnaire, la fonction d'onde $\varphi\left(\vec{r}\right)$ associée vérifie l'équation de *E. Schrödinger*

$$-\frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot \Delta\varphi\left(\vec{r}\right) + V\left(\vec{r}\right) \cdot \varphi\left(\vec{r}\right) = E \cdot \varphi\left(\vec{r}\right)$$

où E est l'énergie d'un état stationnaire de l'électron et Δ l'opérateur Laplacien.

Q44. Par opposition avec les principes de la physique classique, comment est décrit le comportement des particules à l'échelle microscopique en physique quantique ? Une réponse en une phrase est attendue.

Q45. Que représente physiquement, pour l'électron de l'atome d'hydrogène, la norme au carré de la fonction d'onde associée $\left|\varphi\left(\vec{r}\right)\right|^2$?

Q46. Concernant l'orbitale 1s (n = 1, l = 0), la résolution de l'équation de *Schrödinger* conduit à

$$\varphi_{1s}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot r_0^{\,3}}} \cdot e^{-\frac{r}{r_0}} \text{ et } \left|\varphi_{1s}\left(r\right)\right|^2 = \frac{1}{\pi \cdot \left(r_0\right)^3} \cdot e^{-\frac{2 \cdot r}{r_0}}$$

avec r_0 le rayon de *Bohr* de la question **Q18**.

Nommer puis expliquer la propriété qui permet de justifier dans l'expression de $\left|\varphi_{1s}\left(r\right)\right|^2$ la provenance du coefficient $\dfrac{1}{\pi \cdot \left(r_0\right)^3}$.

Q47. À partir de l'équation de *Schrödinger*, établir l'expression de l'énergie E_{1s}, correspondant à l'énergie d'un état stationnaire de l'électron lié à l'orbitale 1*s* de l'atome d'hydrogène, en fonction de ε_0, h, m_e et e. Comparer son expression à celle de l'énergie E_0 du modèle de *Bohr* de la question **Q20.**

L'expression du laplacien d'une fonction scalaire $f(r)$ en coordonnées sphériques est :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \frac{df(r)}{dr} \right).$$

Q48. La densité de probabilité de présence d'un électron sur une sphère de rayon r, encore appelée densité radiale de probabilité, est notée $P(r)$. Dans le cas de l'orbitale 1*s*, montrer que la densité radiale de probabilité $P(r)$ de trouver l'électron à une distance r du noyau est :

$$P(r) = 4 \cdot \frac{r^2}{(r_0)^3} \cdot e^{-\frac{2 \cdot r}{r_0}}.$$

Q49. La courbe de la **figure 10** représente $P(r)$ pour l'électron 1*s* de l'atome d'hydrogène. On montre que la distance moyenne entre l'électron et le noyau est $\langle r \rangle = \frac{3}{2} \cdot r_0$.

En vous appuyant sur la **figure 10**, expliquer pourquoi cette distance est différente du maximum de $P(r)$.

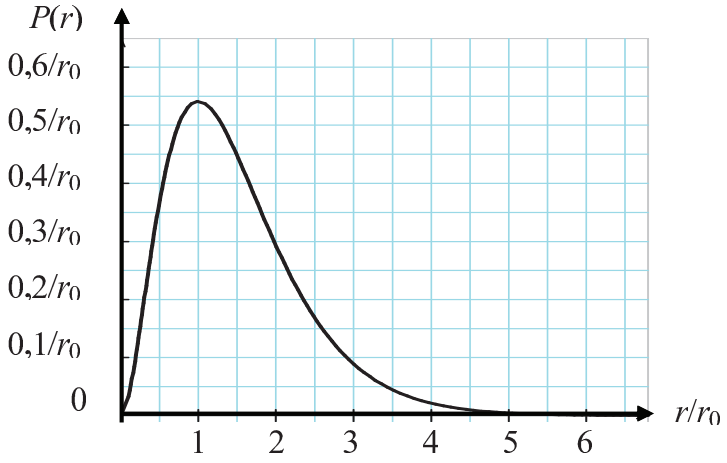


Figure 10 – Densité radiale de probabilité $P(r)$

FIN

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Électrostatique : formulation locale et condensateur
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Magnétostatique : formulation locale
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc