Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2026, filière PC

## Physique

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : mesure de la force s'exerçant sur le plan
- Partie II : mesure du déplacement relatif entre la sphère et le plan
- Partie III : application à la nanorhéologie

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/pc/2026/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

# PHYSIQUE

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

---

**Les calculatrices sont interdites.**

Le problème est constitué de trois parties pouvant être traitées indépendamment. Il est toutefois recommandé de les traiter dans l'ordre pour bien s'approprier la logique du problème qui forme un tout cohérent. Un formulaire est fourni page 3.

Lorsqu'une application numérique est demandée, on attend, sauf mention contraire, un résultat utilisant une écriture scientifique avec un seul chiffre significatif dans la mantisse. Par exemple, une écriture correcte de la célérité de la lumière dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$, mais les écritures $c = 10^8\ m \cdot s^{-1}$, $c = 10^{8,5}\ m \cdot s^{-1}$ ou $c = 1/3 \cdot 10^9\ m \cdot s^{-1}$ ne le sont pas.

# Nanorhéologie par appareil à force dynamique de surface

Source : Restagno, Frédéric. *Interactions entre contacts solides et cinétique de la condensation capillaire. Aspects macroscopiques et aspects microscopiques.* Thèse de doctorat – ENS LYON, 2000

## Présentation générale

La nanorhéologie est l'étude de l'écoulement des liquides entre des parois séparées d'une distance inférieure au micromètre. Ce domaine est d'un intérêt majeur pour comprendre les mécanismes des frottements fluides, aussi bien dans le domaine industriel (lubrification des moteurs), naturel (écoulement dans les milieux poreux) que biologique (liquide synovial entre les articulations).

Une manière d'accéder à des mesures de nanorhéologie est d'utiliser un appareil à force dynamique de surface (abrégé dans cet énoncé par l'acronyme anglais dSFA, pour *dynamic Surface Force Apparatus*), qui est un dispositif permettant de mesurer la force qu'exerce le fluide sur une des parois qui le contient lors de son écoulement. Ce sujet s'intéresse à quelques aspects d'un dSFA développé à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

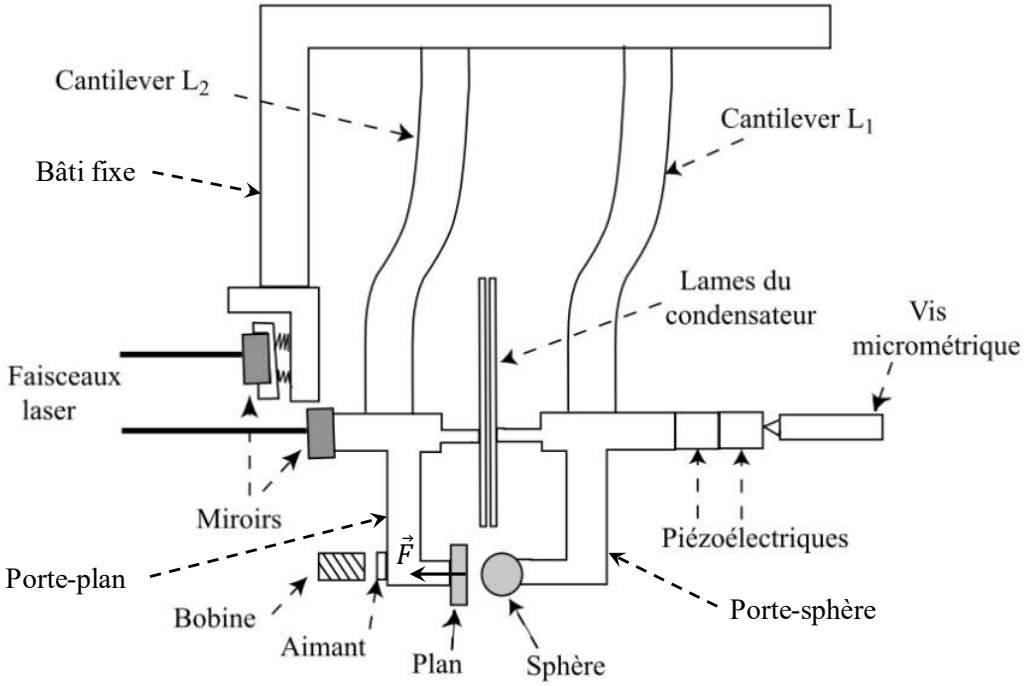



**Figure 1 -** Schéma de principe de l'appareil à force dynamique de surface (la partie optique du dispositif n'est pas entièrement représentée)

Le schéma de principe du dSFA est représenté sur la **figure 1**. Une goutte de fluide est insérée entre une sphère et un plan séparés d'une distance allant de quelques nanomètres à quelques centaines de nanomètres, formant ainsi un mince filet fluide. La sphère et le plan sont fixés à des structures, respectivement nommées porte-sphère et porte-plan, attachées à des cantilevers (bilames déformables) $L_1$ et $L_2$, qui permettent une translation horizontale de ces structures et donc un mouvement de la sphère par rapport au plan. Pour aboutir à la configuration d'étude, on rapproche d'abord la sphère du plan à une distance d'environ un micromètre à l'aide d'une vis micrométrique. Ensuite, une première céramique piézoélectrique poursuit le rapprochement jusqu'à la distance sphère/plan souhaitée. Une seconde céramique piézoélectrique imprime alors une oscillation sinusoïdale à la sphère, à la pulsation $\omega$. Cette oscillation met en mouvement le fluide entre la sphère et le plan, ce qui provoque une force $\vec{F}$ normale au plan, de même pulsation $\omega$. C'est la raison pour laquelle on évoque un appareil à force *dynamique* de surface.

La force $\vec{F}$ est mesurée à l'aide d'un capteur de force dont le principe est étudié dans la **partie I**. Cette force provoque un déplacement du porte-plan qui est détecté par une méthode interférométrique (**sous-partie I.1**) dont la mesure permet de remonter à la force $\vec{F}$ (**sous-partie I.2**). La mesure des déplacements relatifs entre la sphère et le plan utilise un condensateur qui fait l'objet de la **partie II**. Après avoir décrit le principe de la mesure (**sous-partie II.1**), on verra que l'écoulement de l'air entre les armatures produit une force susceptible de perturber le capteur de force (**sous-partie II.2**). Enfin, dans la **partie III**, on s'intéressera à quelques mesures de nanorhéologie utilisant ce dSFA.

## Formulaire

Pour tout champ scalaire $a$ et tout champ vectoriel $\vec{b}$ :

$$\mathrm{div}\left(a\vec{b}\right) = a\,\mathrm{div}\,\vec{b} + \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques $(r,\theta,x)$ pour un champ scalaire $a$ ou un champ vectoriel $\vec{b}$ $(b_r,b_\theta,b_x)$ :

- *Gradient* :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} \end{vmatrix}$$

- *Divergence* :

$$\mathrm{div}\,\vec{b} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rb_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial b_x}{\partial x}$$

- *Rotationnel* :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial b_x}{\partial \theta} - \dfrac{\partial b_\theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial b_r}{\partial x} - \dfrac{\partial b_x}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rb_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial b_r}{\partial \theta}\right) \end{vmatrix}$$

- *Laplacien scalaire* :

$$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

- *Laplacien vectoriel :*

$$\Delta\vec{b} = \begin{vmatrix} \Delta b_r - \dfrac{b_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta b_\theta - \dfrac{b_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial b_r}{\partial \theta} \\ \Delta b_x \end{vmatrix}$$

# Partie I - Mesure de la force s'exerçant sur le plan

## I.1 - Mesure interférométrique du déplacement du plan par rapport au bâti fixe

La force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le plan se reporte sur le porte-plan et déforme le cantilever $L_2$ (**figure 1**) provoquant un déplacement de l'ensemble plan/porte-plan. Deux miroirs parallèles, l'un posé sur le bâti fixe, l'autre posé sur le porte-plan, permettent par une méthode interférométrique de déterminer ce déplacement par rapport au bâti. La configuration étudiée dans ce sujet se ramène à celle d'un interféromètre de Michelson, bien que le véritable dispositif soit plus complexe.

Le schéma de l'interféromètre est représenté sur la **figure 2**. Un laser He-Ne, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633$ nm, produit un faisceau de lumière rendu divergent par un condenseur (lentille convergente de très courte focale). Ce faisceau est divisé en deux par une lame séparatrice. Le premier faisceau, après avoir été dévié par un miroir à 45°, se réfléchit sur le miroir $M_1$ solidaire du bâti fixe tandis que le second faisceau se réfléchit sur le miroir $M_2$ solidaire du porte-plan mobile. Les faisceaux interfèrent à l'infini après avoir rejoint la lame séparatrice. Une lentille convergente $(\mathcal{L})$ permet de projeter la figure d'interférences sur un écran placé dans son plan focal image. La propagation de la lumière se fait dans l'air d'indice optique $n = 1$. On ne tiendra pas compte des déphasages liés aux réflexions sur les miroirs et sur la lame séparatrice.

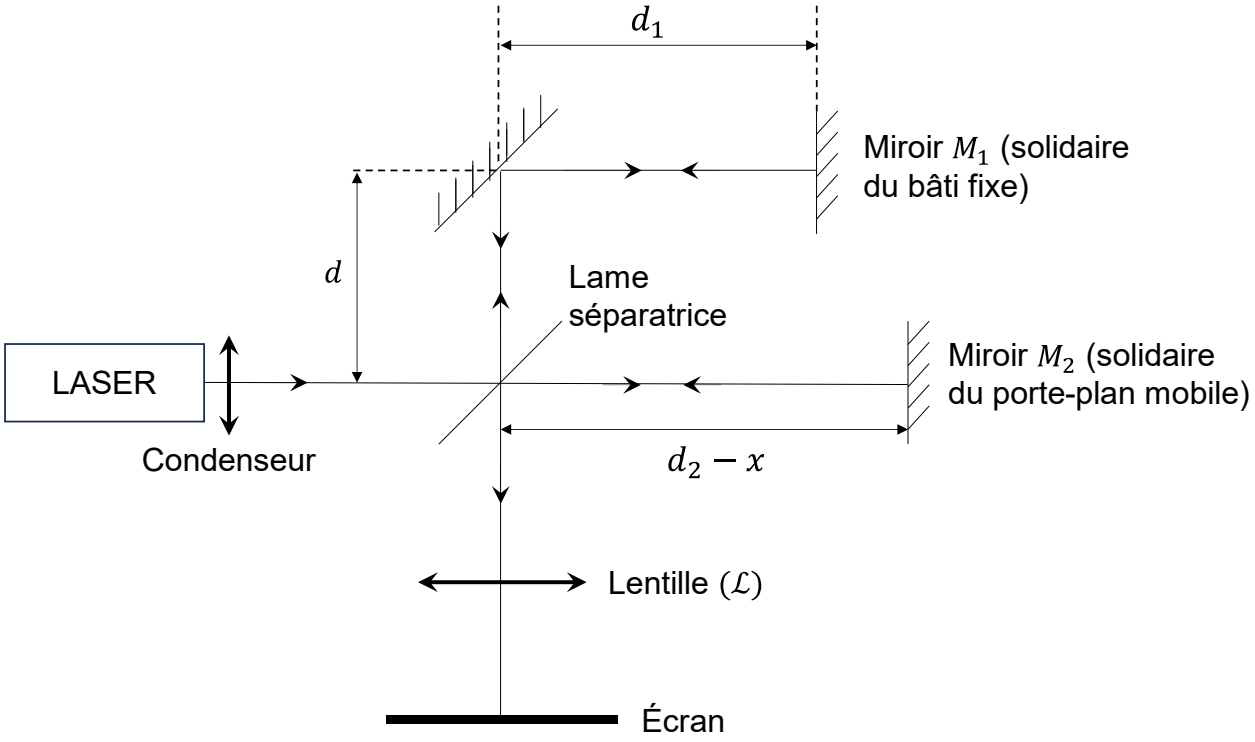



**Figure 2 -** Représentation schématique de l'interféromètre (seul le rayon central du faisceau laser est dessiné)

**Q1.** La configuration présentée sur la **figure 2** est équivalente à un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Faire le schéma équivalent de la lame d'air, d'épaisseur $e$, puis tracer le cheminement d'un rayon arrivant sur la lame avec un angle d'incidence $i$ par rapport à la normale aux miroirs. Établir l'expression de la différence de marche à l'infini en fonction de $e$ et de $i$.

**Q2.** Dans le plan focal image de la lentille de projection, on observe des franges en forme d'anneaux, appelées franges d'égale inclinaison. Justifier ce terme. Qu'obtiendrait-on sur l'écran en l'absence du condenseur placé en sortie du laser ?

**Q3.** Le miroir $M_1$ peut être translaté. Pour atteindre le contact optique, doit-on augmenter ou diminuer le rayon des anneaux visibles sur l'écran ? Justifier.

La distance $d_2$ est la distance entre la séparatrice et le miroir $M_2$ lorsque le plan n'est soumis à aucune force. Lorsqu'une force s'exerce sur le plan, le miroir se déplace de la distance $x$, comptée positivement vers la gauche sur le schéma de la **figure 2**, si bien que la distance entre la séparatrice et le miroir $M_2$ est $d_2 - x$.

**Q4.** Le contact optique est atteint en l'absence de force sur le plan ($x = 0$). Donner la relation entre $d$, $d_1$ et $d_2$ dans cette situation.

Une fois le contact optique réalisé, on incline légèrement le miroir $M_1$ d'un petit angle $\alpha$ afin de se placer dans une configuration coin d'air (**figure 3**). À la sortie du laser, on remplace le condenseur par un élargisseur de faisceau afin d'avoir une incidence quasi-normale sur les miroirs. Les interférences sont désormais localisées sur les miroirs, et on repère par $y$ la position sur les miroirs depuis le point $O$ d'intersection des miroirs. La différence de marche entre le rayon se réfléchissant sur $M_1$ et celui se réfléchissant sur $M_2$ est $2e_0(y)$, où $e_0(y)$ désigne l'écart (algébrique) entre les deux miroirs à la position $y$.

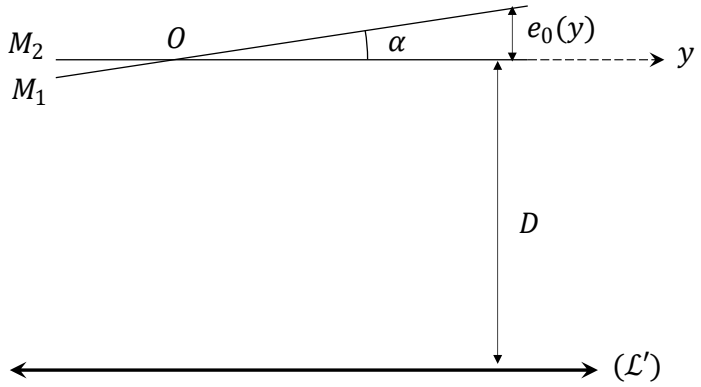



**Figure 3 -** Schéma équivalent de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

**Q5.** On remplace la lentille $(\mathcal{L})$ par une autre lentille convergente $(\mathcal{L}')$ de plus courte focale $f'$. Sachant que la distance entre le miroir $M_2$ et la lentille est $D > 0$, à quelle distance $D'$ de la lentille doit-on placer l'écran pour y observer les interférences ?

**Q6.** Quelle est la forme des franges d'interférences ? Comment les appelle-t-on ? Déterminer l'expression de l'interfrange $i_e$ sur l'écran en fonction de $D$, $D'$, $\alpha$ et de $\lambda$.

**Q7.** On note $\delta_0$ la différence de marche en un point donné des miroirs lorsque $x = 0$. Déterminer, en fonction de $\delta_0$ et de $x$, la différence de marche $\delta(x)$ en ce même point lorsque le miroir $M_2$ se décale de $x$.

**Q8.** Les rayons interférant en un point de l'écran ont la même amplitude lumineuse et on note $\mathcal{E}_0$ l'éclairement sur l'écran dû à un seul rayon. Établir la formule de Fresnel donnant l'éclairement $\mathcal{E}$ résultant de l'interférence de ces deux rayons en fonction de $\mathcal{E}_0$, $\delta(x)$ et de $\lambda$. En déduire que :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda} + \Psi\right)\right),$$

où $\mathcal{E}_{max}$ est l'éclairement pour une frange brillante à exprimer en fonction de $\mathcal{E}_0$ et où $\Psi$ est à exprimer en fonction de $\delta_0$ et de $\lambda$.

La mesure de l'éclairement doit permettre de remonter à $x$. Pour optimiser la précision, il faut que les variations de l'éclairement soient maximales lorsque $x$ varie autour de $x = 0$.

**Q9.** Donner l'expression de la sensibilité $S = \left|\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right|$, puis déterminer les valeurs de $\Psi$ qui maximisent cette sensibilité au voisinage de $x = 0$.

Pour mesurer l'éclairement, on place deux photodiodes en deux points de l'écran correspondant à deux valeurs successives de $\Psi$ maximisant la sensibilité.

**Q10.** Montrer que pour $x \ll \lambda$, les éclairements des photodiodes sont :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{2}\left(1 - \dfrac{4\pi x}{\lambda}\right) \\ \mathcal{E}_2 = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{2}\left(1 + \dfrac{4\pi x}{\lambda}\right) \end{cases}.$$

Une photodiode convertit l'éclairement $\mathcal{E}$ reçu en une intensité électrique proportionnelle. En effet, lorsque la photodiode est en court-circuit (tension nulle à ses bornes), elle produit une intensité électrique $I_{cc} = \beta\mathcal{E}$, avec $\beta$ une constante, identique pour les deux photodiodes. Chaque photodiode est insérée dans un montage à amplificateur linéaire intégré (ALI) représenté sur la **figure 4**, appelé convertisseur courant/tension. L'ALI est supposé idéal.

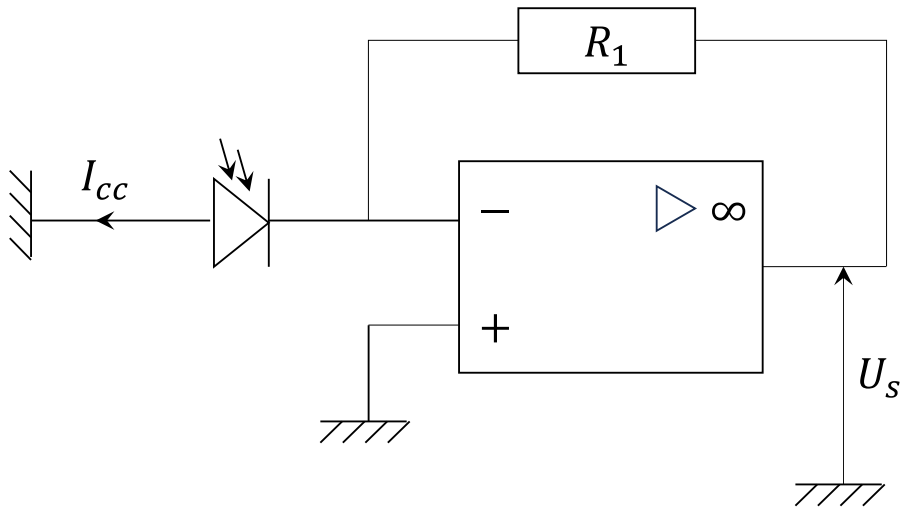



**Figure 4 -** Convertisseur courant/tension

**Q11.** À partir du schéma de la **figure 4**, justifier que l'ALI fonctionne en régime linéaire. En déduire que la photodiode est bien en court-circuit.

**Q12.** Déterminer la tension $U_s$ en sortie de ce montage en fonction de $\beta$, $R_1$ et de $\mathcal{E}$.

On note $U_1$ (respectivement $U_2$) la tension de sortie du montage contenant la photodiode recevant l'éclairement $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$). Par des opérations analogiques sur ces tensions, on obtient la tension finale $U_{opt} = K\frac{U_2 - U_1}{U_1 + U_2}$, avec $K = 10$ V.

**Q13.** Exprimer $U_{opt}$ en fonction de $K$, $\lambda$ et de $x$. La tension minimale que peut détecter la carte d'acquisition utilisée est $U_{opt} = 2{\cdot}10^{-4}$ V ; quel déplacement minimal du miroir $M_2$ peut-on espérer détecter avec ce capteur interférométrique ?

## I.2 - Réponse mécanique du cantilever

La détermination de $x$ par interférométrie a pour objectif de mesurer la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le plan (**figure 1**). En effet, sous l'action de cette force, le plan et le porte-plan rattachés au cantilever $L_2$ se déplacent par rapport au bâti fixe, pris comme référentiel d'étude galiléen. On assimile le plan et le porte-plan à un solide de masse $m$ en translation selon $\overrightarrow{u_x}$ ; $x$ est ici l'écart à la position d'équilibre du solide (lorsque $\vec{F} = \vec{0}$), et $\vec{v}$ est sa vitesse. On modélise les interactions du solide avec le cantilever $L_2$ par une force de rappel de constante de raideur $k$, de la forme $\overrightarrow{F_r} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$, et par une force de dissipation visqueuse de coefficient $\mu$, de la forme $\overrightarrow{f_v} = -\mu\vec{v}$ (**figure 5**).

Le mouvement du fluide entre la sphère et le plan, à l'origine de la force $\vec{F}$, est provoqué par le mouvement sinusoïdal de la sphère à la pulsation $\omega$, selon $\overrightarrow{u_x}$. En régime permanent, toutes les grandeurs mécaniques sont donc sinusoïdales et de même pulsation. En particulier, la force $\vec{F}$ est de la forme $\vec{F}(t) = F(t)\,\overrightarrow{u_x} = F_1\cos(\omega t + \psi)\,\overrightarrow{u_x}$ et le mouvement du plan est $x(t) = x_1\cos(\omega t + \varphi)$.

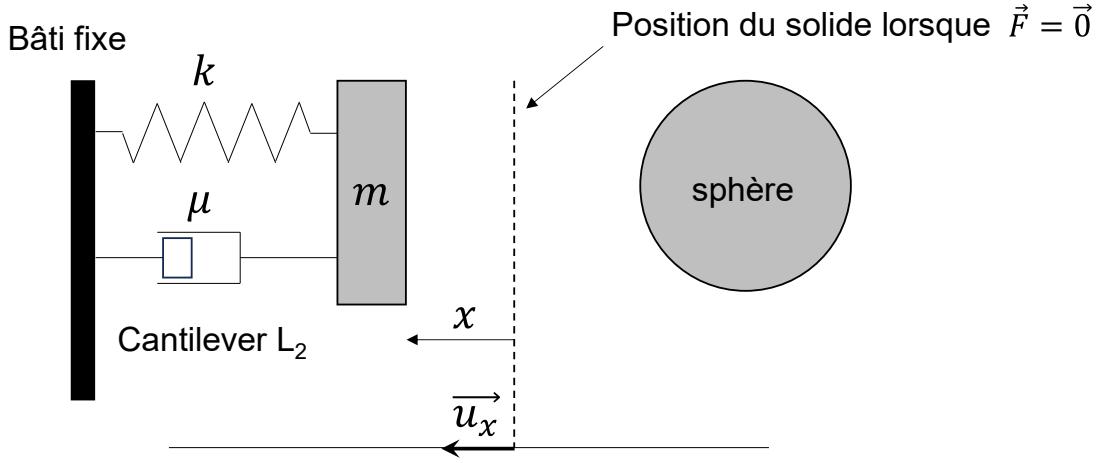



**Figure 5 -** Modélisation du mouvement du système plan/porte-plan

**Q14.** Quelle est l'origine physique des forces $\overrightarrow{F_r}$ et $\overrightarrow{f_v}$ introduites dans ce modèle ?

**Q15.** On note $j$ le complexe tel que $j^2 = -1$. Écrire les signaux complexes $\underline{F}(t)$ et $\underline{x}(t)$ associés à $F(t)$ et $x(t)$. On introduira les amplitudes complexes $\underline{F_1}$ et $\underline{x_1}$, dont on précisera les expressions en fonction de $F_1$, $x_1$, $\varphi$ et de $\psi$.

**Q16.** Montrer que la fonction de transfert mécanique de ce système a pour expression :

$$\underline{H_m} = \frac{k\underline{x_1}}{\underline{F_1}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}},$$

où la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$ seront exprimés en fonction de $m$, $k$ et de $\mu$. Préciser la signification physique de $\omega_0$ et de $Q$.

**Q17.** Déterminer le module de la fonction de transfert $\left|\underline{H_m}\right|$ en fonction de $\xi = \omega/\omega_0$.

**Q18.** Montrer que pour une condition sur $Q$ que l'on précisera, $\left|\underline{H_m}\right|$ présente une résonance à une pulsation $\omega_r$ dépendant de $\omega_0$ et de $Q$. À quelle condition sur $Q$ peut-on considérer que $\omega_r \simeq \omega_0$ ?

Pour déterminer $\omega_0$ et $Q$, on réalise une étude en fréquence. Pour ce faire, la force excitatrice est cette fois-ci produite par une bobine située au voisinage d'un aimant attaché au porte-plan (**figure 1**) afin de produire une force d'amplitude constante à toute fréquence. Le module de la fonction de transfert $\left|\underline{H_m}\right|$ est représenté sur le graphe de la **figure 6**.

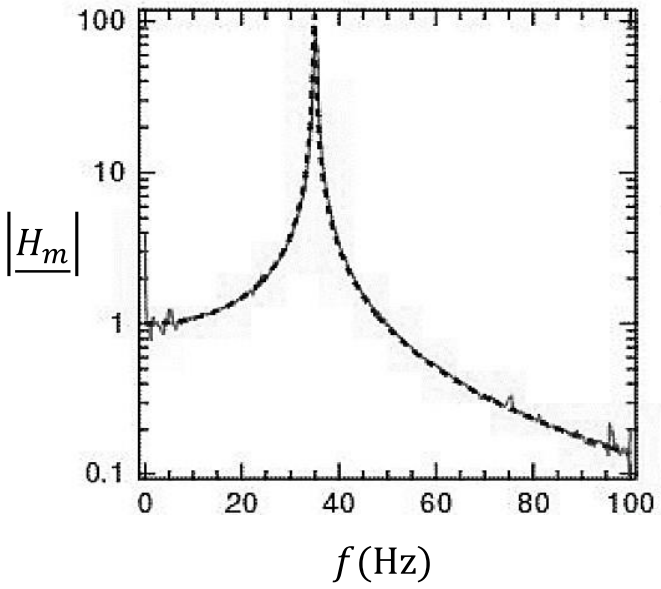



**Figure 6 -** Module de la fonction de transfert mécanique en fonction de la fréquence d'excitation

**Q19.** Déterminer les valeurs numériques de $\omega_0$ et de $Q$ à partir du graphe de la **figure 6**.

Pour déduire la force $\vec{F}$ de la fonction de transfert $\underline{H_m}$, il faut mesurer la constante de raideur $k$ du système, puisque $\underline{F_1} = \frac{kx_1}{\underline{H_m}}$. Pour ce faire, on met en œuvre la méthode de Cleveland, qui consiste à lester le porte-plan avec des masses $m_a$ croissantes. La masse du système est alors $m + m_a$, ce qui modifie la pulsation propre $\omega_0$. Par le même protocole que précédemment, on détermine $\omega_0$ pour plusieurs valeurs de $m_a$. Les résultats sont rassemblés sur le graphe de la **figure 7**.

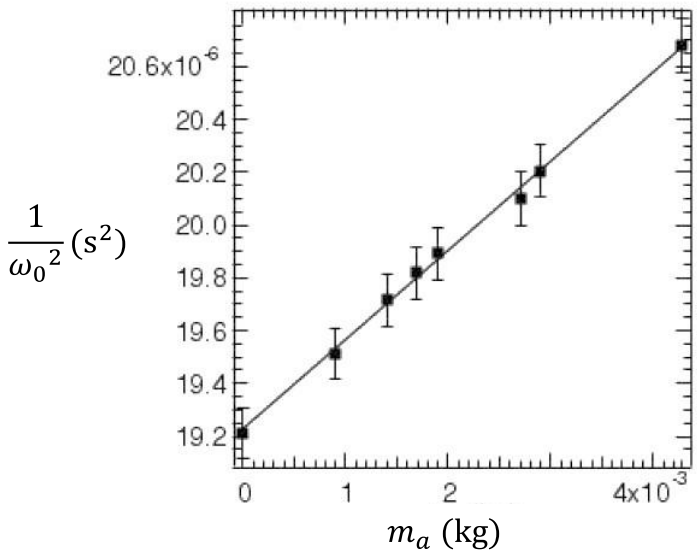



**Figure 7 -** Détermination de la constante de raideur

**Q20.** Déterminer la valeur de la constante de raideur $k$ à partir du graphe de la **figure 7**. Quelle autre grandeur pourrait être déduite de ce graphe ?

**Q21.** Lorsque le capteur interférométrique mesure une vibration d'amplitude $x_1 = 2$ nm à une fréquence d'excitation de 40 Hz, le capteur de force en déduit une force d'amplitude $F_1 = 2$ μN sur le plan. En déduire la valeur de $k$ implémentée dans l'appareil. Commenter.

## Partie II - Mesure du déplacement relatif entre la sphère et le plan

Comme on le verra dans la **partie III,** la connaissance du déplacement relatif entre la sphère et le plan est essentielle dans les expériences de nanorhéologie. Pour cela, un capteur capacitif est mis en place : il s'agit d'un condensateur plan tel que la distance entre les deux armatures varie de la même façon que la distance entre la sphère et le plan, du fait de la rigidité du porte-plan et du porte-sphère (**figure 1**).

Les armatures du condensateur sont constituées de deux disques parallèles de rayon $R = 3$ cm (**figure 8**). La distance $\ell$ entre les deux armatures varie, mais reste très proche de 50 μm. L'armature de centre $O$ est solidaire de la sphère tandis que l'armature de centre $A$ est solidaire du plan. On supposera que le référentiel de l'armature de centre $O$ est galiléen, même si c'est inexact en toute rigueur du fait du mouvement de la sphère. On se place dans un système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, x)$, l'axe $(Ox)$ étant l'axe de symétrie de révolution des deux armatures. En un point $M$ hors de l'axe $(Ox)$, on introduit la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_x})$.

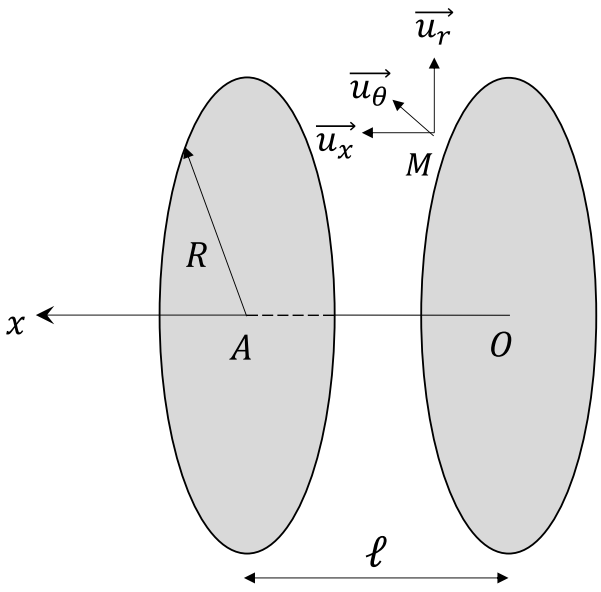



**Figure 8 -** Schéma du condensateur

### II.1 - Fonctionnement du capteur capacitif

L'armature de centre $O$ (respectivement $A$), porte une charge $+Q$ (respectivement $-Q$) uniformément répartie, et son potentiel électrostatique est $V_O$ (respectivement $V_A$). La tension du condensateur est $U = V_O - V_A$. Même si les charges sur les armatures sont amenées à varier au cours du temps, on admettra qu'on peut raisonner dans le cadre de l'électrostatique.

On cherche tout d'abord à déterminer le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du condensateur afin d'en déduire l'expression de sa capacité.

**Q22.** Justifier qu'on peut supposer ici les armatures infinies pour rechercher le champ électrique $\vec{E}$. Sous cette hypothèse, déterminer la direction de $\vec{E}$ entre les deux armatures et montrer par une analyse des invariances qu'il ne dépend *a priori* que d'une seule des trois coordonnées cylindriques.

**Q23.** En utilisant une équation de Maxwell, montrer que le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur.

**Q24.** En utilisant une autre équation de Maxwell, énoncer, en la justifiant, la relation entre le potentiel électrostatique $V$ et le champ électrique $\vec{E}$. En déduire l'expression de $\vec{E}$ en fonction de $U$, $\ell$ et d'un vecteur unitaire.

**Q25.** On rappelle que l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique est $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, avec $\varepsilon_0$ la permittivité diélectrique du vide. En déduire l'énergie électrostatique $E_e$ stockée à l'intérieur du condensateur en fonction de $\varepsilon_0$, $U$, $\ell$ et de $R$.

**Q26.** Donner sans démonstration l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur en fonction de sa capacité $C$ et de sa tension $U$. En déduire l'expression de $C$ en fonction de $\varepsilon_0$, $\ell$ et de $R$.

Le condensateur est connecté en parallèle avec une bobine d'inductance propre $L$, formant ainsi un circuit $LC$ oscillant (**figure 9**).

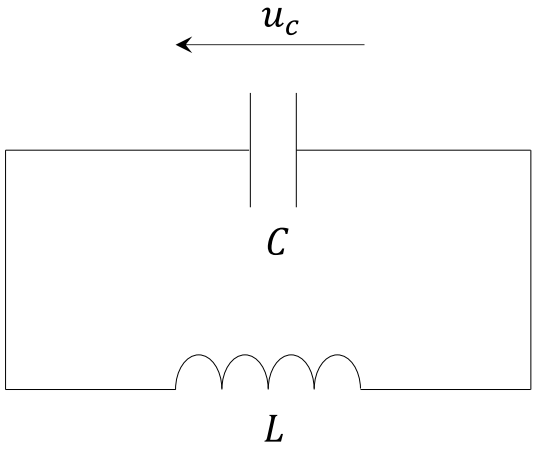



**Figure 9 -** Circuit $LC$ oscillant

**Q27.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c$ du condensateur dans ce circuit. En déduire l'expression de la fréquence $f_{LC}$ des oscillations.

**Q28.** La fréquence d'oscillation $f_{LC}$ de ce circuit est mesurée. Montrer que cela permet d'en déduire $\ell$ par la relation :

$$\ell = 4\pi^3 \varepsilon_0 R^2 L {f_{LC}}^2.$$

**Q29.** Pour une variation élémentaire $d\ell$ de la distance entre les armatures, la fréquence $f_{LC}$ varie de $df$. Exprimer $d\ell$ en fonction de $df$. Sachant que la fréquence $f_{LC}$ est de l'ordre de 10 MHz, que l'inductance propre est de 2 μH, que $\varepsilon_0 = 9{\cdot}10^{-12}$ F·m$^{-1}$ et que la méthode de mesure permet de détecter des variations de fréquence de 0,2 Hz, calculer le déplacement relatif minimal entre le plan et la sphère que ce capteur capacitif est capable de détecter.

## II.2 - Perturbation liée à l'écoulement de l'air entre les armatures

Le mouvement des armatures déplace l'air qui se situe entre celles-ci. Dans cette sous-partie, on va montrer que le déplacement de l'air donne naissance à une force sur les armatures orientée selon $\overrightarrow{u_x}$, qui s'ajoute au bilan des forces effectué dans la **sous-partie I.2** et qui est donc susceptible de perturber la mesure du capteur de forces.

**Q30.** Établir l'équation locale de conservation de la masse dans une géométrie unidimensionnelle cartésienne, pour un fluide de masse volumique $\rho$ et de champ de vitesse $\vec{v}$. On admettra sa généralisation en géométrie quelconque sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \vec{v}) = 0.$$

**Q31.** Rappeler l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Après avoir fait apparaître cette dérivée particulaire dans l'équation locale de conservation de la masse, établir la condition sur le champ de vitesse qui traduit un écoulement incompressible.

**Q32.** En déduire que le débit volumique $D_V$ à travers toute surface fermée fixe au sein d'un écoulement incompressible est nul.

L'air entre les armatures est assimilé à un fluide newtonien en écoulement incompressible, de masse volumique $\rho_a = 1$ kg·m$^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta_a = 2{\cdot}10^{-5}$ Pa·s. On se place dans le référentiel de l'armature de centre $O$ (**figure 8**). L'armature de centre $A$ présente un mouvement sinusoïdal de pulsation $\omega$ :

$$\ell(t) = \ell_0 + \ell_1 \cos(\omega t)\,,$$

avec $\ell_1$ de l'ordre de quelques nanomètres, $\ell_0$ de l'ordre de 50 µm. Sachant que le rayon des armatures est $R = 3$ cm, on pourra considérer que $\ell_1 \ll \ell_0 \ll R$.

On suppose que le champ de vitesse de l'air entre les armatures du condensateur est de la forme :

$$\vec{v} = v_r(r,x,t)\,\overrightarrow{u_r} + v_x(r,x,t)\,\overrightarrow{u_x}\,.$$

**Q33.** Exprimer $v_x(r, x = 0, t)$ et $v_x(r, x = \ell, t)$.

**Q34.** On note $u(r,t)$ la vitesse moyenne de $v_r(r,x,t)$ sur la surface latérale d'un cylindre de rayon $r$ et de hauteur $\ell$. En utilisant le résultat de la question **Q32** sur la surface fermée qui entoure ce cylindre, montrer que :

$$u(r,t) \simeq -\frac{r\dot{\ell}(t)}{2\ell_0}.$$

Sachant que les fréquences d'oscillation sont de l'ordre de quelques dizaines de Hz, estimer un ordre de grandeur (sous forme d'une puissance de 10) de $u(R)$.

Comme $\ell_0 \ll R$, on fera l'approximation que la vitesse est essentiellement radiale : $\vec{v} = v_r(r,x,t)\,\overrightarrow{u_r}$. L'écoulement est décrit par l'équation de Navier-Stokes (en négligeant les effets de la pesanteur) :

$$\rho_a \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta_a\, \Delta \vec{v}\,,$$

où $P(r,x,t)$ est le champ de pression.

**Q35.** Estimer un ordre de grandeur (sous forme d'une puissance de 10) du nombre de Reynolds pour l'écoulement radial de l'air entre les armatures, en prenant $\ell_0$ pour échelle spatiale caractéristique. Quel terme de l'équation de Navier-Stokes peut être négligé ?

**Q36.** En introduisant des échelles caractéristiques, comparer $\rho_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $\eta_a \, \Delta\vec{v}$, puis montrer que l'un de ces deux termes peut être négligé dans l'équation de Navier-Stokes.

**Q37.** Projeter l'équation de Navier-Stokes selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_r}$. Montrer que le champ de pression ne dépend pas de $x$. En raisonnant à nouveau en échelles caractéristiques et en négligeant les termes appropriés, montrer que :

$$\eta_a \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial r}$$

**Q38.** Justifier que l'équation précédente permet de trouver un profil parabolique pour le champ de vitesse selon la coordonnée $x$ :

$$v_r(r,x,t) = a(r,t)\, x^2 + b(r,t)\, x + c(r,t)$$

où $a$, $b$ et $c$ sont trois fonctions qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade.

**Q39.** Donner la définition de la vitesse moyenne $u(r,t)$ à partir de $v_r(r,x,t)$. En faisant l'hypothèse de non glissement de l'air sur les parois, montrer que :

$$v_r(r,x,t) = \frac{6u(r,t)}{\ell_0} x \left(1 - \frac{x}{\ell_0}\right).$$

**Q40.** On suppose que la pression à l'extérieur des armatures du condensateur est uniforme et égale à $P_0$. Montrer que :

$$P(r,t) = P_0 - \frac{3\eta_a \dot{\ell}(t)}{{\ell_0}^3}(R^2 - r^2).$$

**Q41.** Déterminer l'expression de $\overrightarrow{F_v}$, résultante des forces de pression sur l'armature de centre $O$.

L'amplitude de la force $\overrightarrow{F_v}$ estimée à partir de l'expression précédente est de plusieurs dizaines de μN, ce qui est susceptible de perturber le capteur de force étudié dans la **partie I**, mesurant des forces du même ordre de grandeur sur le plan.

**Q42.** Les armatures du condensateur ont été percées, comme cela peut être observé sur la photographie de la **figure 10**. Pour quelle raison ?

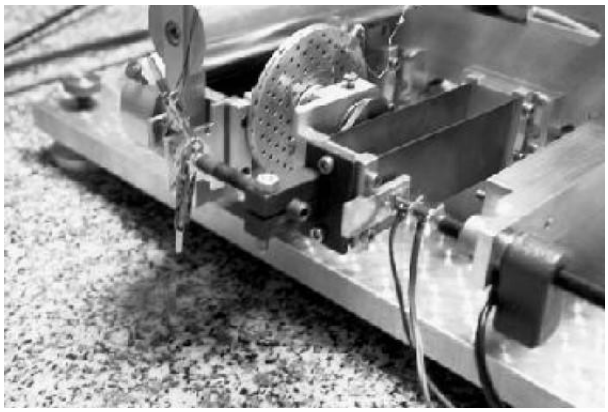


**Figure 10 -** Photographie des armatures du condensateur

# Partie III - Application à la nanorhéologie

Dans cette partie, on s'intéresse à l'écoulement du fluide entre le plan et la sphère, et à la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le plan du fait de cet écoulement.

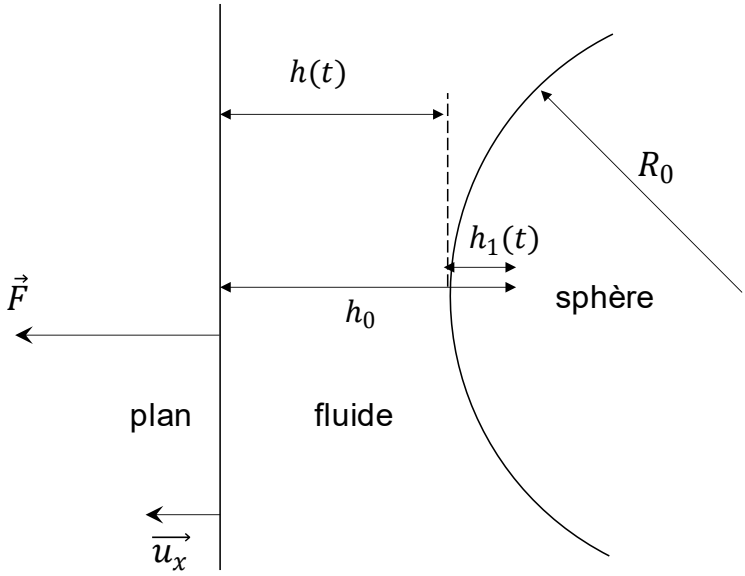



**Figure 11 -** Force générée par l'écoulement du fluide sur le plan

La sphère, de rayon $R_0$, est située à une distance moyenne $h_0$ du plan, et oscille de façon sinusoïdale avec une amplitude $h_1$ (**figure 11**) :

$$h(t) = h_0 - h_1(t) = h_0 - h_1 \cos(\omega t).$$

Une goutte de liquide, de viscosité dynamique $\eta$, est déposée entre le plan et la sphère. La taille caractéristique de cette goutte est suffisamment grande pour qu'on puisse supposer que le liquide baigne complètement la sphère et le plan, ce qui permet notamment de négliger les effets de tension superficielle à l'interface liquide/air. La force s'exerçant sur le plan est également sinusoïdale :

$$\vec{F} = F(t)\,\overrightarrow{u_x} = F_1 \cos(\omega t + \psi)\ \overrightarrow{u_x}.$$

En passant $h_1(t)$ et $F_1(t)$ en signaux complexes, on définit l'impédance hydrodynamique comme le rapport des amplitudes complexes :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F_1}}{\underline{h_1}} = Z' + jZ''.$$

Par une modélisation analogue à celle effectuée dans la **sous-partie II.2**, on montre que la force s'exerçant sur le plan, appelée force de Reynolds, a pour expression :

$$\vec{F} = -\frac{6\pi\eta {R_0}^2}{h_0}\dot{h}\,\overrightarrow{u_x}.$$

**Q43.** Déterminer l'expression de l'impédance hydrodynamique en utilisant le modèle de la force de Reynolds. Identifier $Z'$ et $Z''$.

On réalise la mesure de l'impédance hydrodynamique en utilisant comme fluide le glycérol, les surfaces du plan et de la sphère étant en Pyrex. La fréquence d'excitation de la sphère est de 39 Hz, le rayon de la sphère est de 1,3 mm. $Z'$ et $Z''$ sont représentées sur la **figure 12** en fonction de la distance $h_0$, tandis que sur la **figure 13**, on représente $1/Z''$ ainsi que la force statique (mesure de $F_1$ sans oscillation de la sphère).

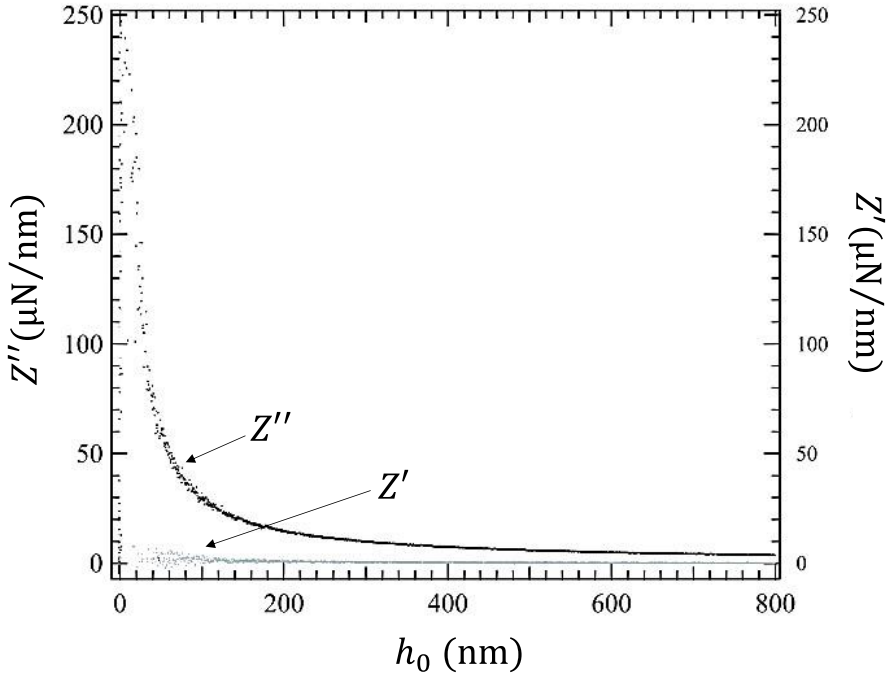



**Figure 12 -** Représentation de $Z'$ (points gris) et de $Z''$ (points noirs) en fonction de $h_0$ pour le système glycérol/Pyrex

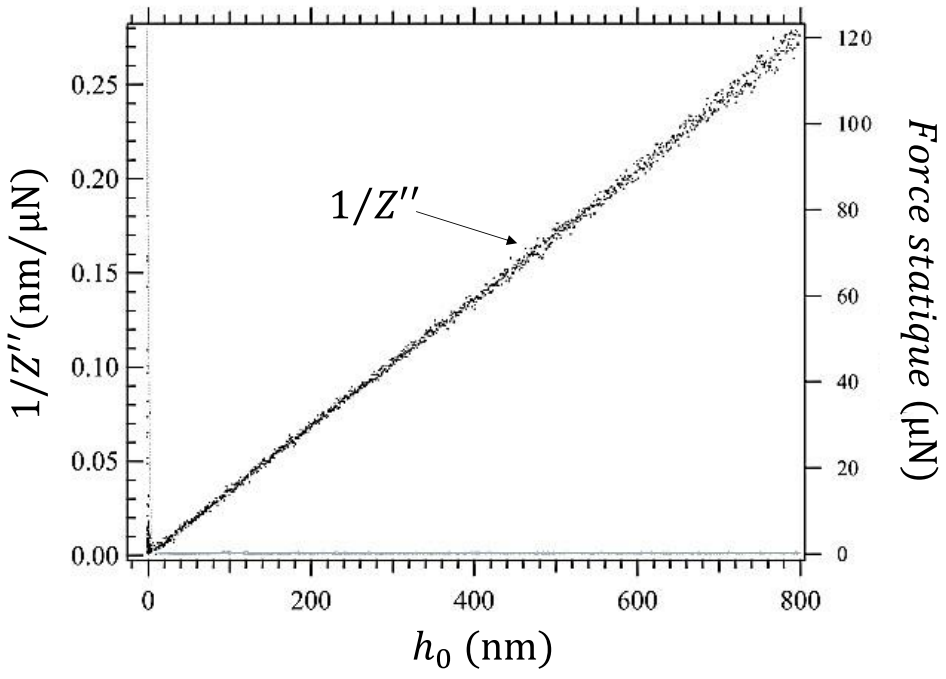



**Figure 13 -** Représentation de $1/Z''$ (points noirs) et de la force statique (points gris) en fonction de $h_0$ pour le système glycérol/Pyrex

**Q44.** Dans quel domaine le modèle de la force de Reynolds est-il validé sur le système glycérol/Pyrex ? Dans le domaine où il est mis en défaut, proposer une interprétation physique de l'écart constaté.

Des expériences ont été réalisées avec de l'eau pour tester l'influence de la nature mouillante ou non mouillante de la surface du plan. La partie imaginaire de l'impédance hydrodynamique a été mesurée avec un plan en Pyrex (surface mouillante) et un plan en Pyrex silanisé (surface non mouillante). Les résultats sont présentés sur la **figure 14**.

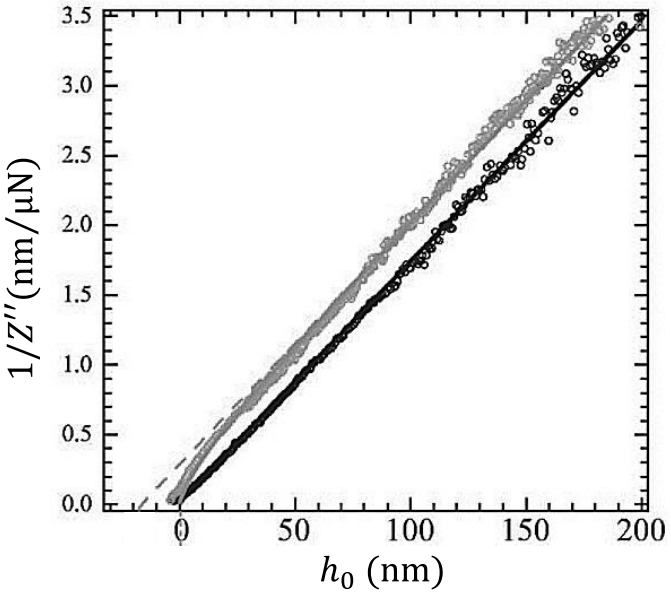



**Figure 14 -** Représentation de $1/Z''$ pour de l'eau au contact d'un plan en Pyrex (points noirs) et un plan en Pyrex silanisé (points gris)

L'écart entre les deux courbes a été interprété en faisant l'hypothèse qu'au contact du plan, l'eau possède en fait une vitesse de glissement non nulle. Tout se passe comme si la surface où l'eau avait une vitesse de glissement nulle était reportée à l'intérieur du plan. La distance entre la surface réelle et cette surface de non glissement fictive est appelée longueur de glissement $b$ (**figure 15**).

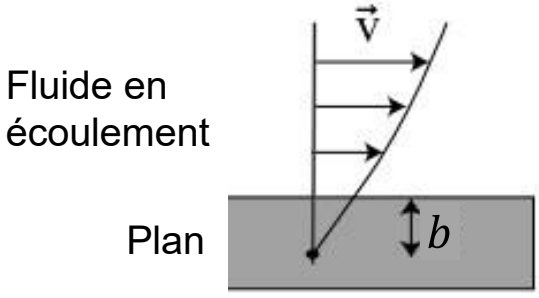



**Figure 15 -** Illustration de la longueur de glissement

**Q45.** Déterminer la longueur de glissement de l'eau sur la surface de Pyrex silanisée. Pourquoi cette longueur de glissement joue-t-elle un rôle important en nanorhéologie, alors qu'on peut généralement la négliger pour des écoulements macroscopiques ?

**FIN**

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1009 – D'après documents fournis

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Interféromètre de Michelson
- Amplificateur linéaire intégré
- Régime sinusoïdal forcé
- Équations différentielles linéaires du second ordre

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/pc