Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2001, filière PSI

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, partie I : séries de restes géométriques et alternées
- Problème 1, partie II : une égalité sur les restes et ses applications
- Problème 2, partie I : intégrales de Wallis
- Problème 2, partie II : produit scalaire et calcul du déterminant

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2001/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99 – BOEN n°42 du 25.11.99.

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

PROBLÈME 1

Etant donné une série convergente $\sum_{k\geq 0} u_k(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ son reste d'ordre n, pour $n \in \mathbf{N}$ et on se propose d'étudier la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$.

PARTIE I

I.1. On suppose que $u_k(x) = (-1)^k x^k$, où $x \in \mathbf{R}$.

I.1.1. Déterminer l'ensemble I des $x \in \mathbf{R}$ tels que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k$ converge et préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ pour $x \in I$.

I.1.2. En supposant que $x \in I$, expliciter $R_n(x)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ converge et calculer sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$.

I.2. On conserve les notations du **I.1** :

$u_k(x)=(-1)^k x^k$, $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k x^k$ pour $n \in \mathbf{N}$ et on pose $R_{-1}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$. On considère par ailleurs la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on pose : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $n \in \mathbf{N}$. On se propose d'établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ et de calculer sa somme.

I.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et par suite l'existence de r_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

I.2.2. Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^2$ avec $n \leq m$ et $I_0 = [0, 1[$.

I.2.2.1. En remarquant que $\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x)$, montrer que pour tout $x \in I_0$ on a l'inégalité : $\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k\right| \leq 2$.

I.2.2.2. L'entier n étant fixé, déduire en particulier de **I.2.2.1** que :

$$\int_{I_0} \lim_{m \to +\infty}\left(\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k\right)dx = \lim_{m \to +\infty}\sum_{k=n}^{m}\int_{I_0}(-1)^k x^k dx$$

et par suite que $r_n = \int_{I_0} R_{n-1}(x)\,dx$.

I.2.2.3. Retrouver ainsi la valeur (bien connue !) de r_0.

I.2.2.4. Montrer que pour tout couple $(m, x) \in \mathbf{N} \times I_0$ on a l'inégalité :

$$\left|\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right| \leq 2.$$

I.2.2.5. Déduire en particulier de **I.2.2.4** que la somme $\sum_{n=0}^{m}\int_{I_0} R_{n-1}(x)dx$ admet une limite lorsque m tend vers $+\infty$.

En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

PARTIE II

Une égalité sur les restes ; quelques applications.

II.1. Egalité sur les restes.

Lorsque la série numérique $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge, on note toujours $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

Soit $\sum_{k\geq 1} u_k$ une série convergente ; exprimer pour $n \in \mathbf{N}$ la différence $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k$ en fonction de n et de R_n.

II.2. Application à une suite.

Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\sum_{k=1}^{n} (n-k)\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \alpha\, n + \beta + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.3. Application à une série à termes positifs.

On suppose de plus que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

II.3.1. Montrer que la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} R_k$ entraîne la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} k u_k$.

II.3.2. On suppose que la série $\sum_{k\geq 1} k u_k$ est convergente. Quelle est la limite de la suite $(n+1)R_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

II.3.3. Déduire de ce qui précède que les deux séries $\sum_{k\geq 0} R_k$ et $\sum_{k\geq 1} k u_k$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent comparer alors leurs sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

II.4. Application à la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^x}$.

On suppose maintenant que $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in D =]\,1, +\infty\,[$.

On note toujours $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ le reste d'ordre n et on pose $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ pour $x \in D$.

Préciser l'ensemble D_1 des $x \in D$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ soit convergente et exprimer, pour $x \in D_1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de la fonction ζ.

Tournez la page S.V.P.

II.5. Application à une série entière.

On suppose maintenant que $u_k(x) = a_k x^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels et où $x \in \mathbf{R}$. On désigne par ρ le rayon de convergence de cette série entière, on suppose $\rho > 0$ et on note $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in]-\rho, \rho[$.

II.5.1. Soit $x \in]-\rho, \rho[$; justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} k a_k x^k$; en déduire que la suite $(n+1)R_n(x)$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ (et préciser cette limite).

II.5.2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ est convergente pour $x \in]-\rho, \rho[$ et exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de x et de la fonction f.

II.5.3. Exemple : on suppose que $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

II.5.3.1. Déterminer alors le rayon de convergence ρ de cette série entière.

II.5.3.2. Expliciter la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ pour $x \in]-\rho, \rho[$ (en justifiant le résultat).

PROBLÈME 2

Notations :

Pour $k \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}$ et $0 \leq j \leq k$, on note $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ le coefficient binomial (avec $0! = 1$).

Si $n \in \mathbf{N}$ on note $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$; on désigne par $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{R}$.
Si $M \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ on note $M = (m_{i,j})$ avec $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ ou $m_{i,j}$ désigne l'élément de la ligne i et de la colonne j.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on considère la matrice $W_n = (w_{i,j}) \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbf{R})$, $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $w_{i,j}$ définie par :

si $i+j$ est pair : $i+j = 2p$ alors $w_{i,j} = \dfrac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$

si $i+j$ est impair alors $w_{i,j} = 0$

On se propose de calculer le déterminant de W_n noté $det\, W_n$.

PARTIE I

I.1. Expliciter la matrice W_3.

I.2. Calculer $det\, W_3$.

I.3. Pour $m \in \mathbf{N}$ on note $J_m = \displaystyle\int_0^{\pi} cos^m t \; dt$.

I.3.1. Calculer J_0 et J_1.

I.3.2. Etablir une relation entre J_{m+2} et J_m pour $m \in \mathbf{N}$.

Quelle est la valeur de J_{2p+1} pour $p \in \mathbf{N}$?

I.3.3. Expliciter J_{2p} en fonction de p et du coefficient binomial C_{2p}^p pour $p \in \mathbf{N}$.

I.3.4. Exprimer $w_{i,j}$ en fonction de J_{i+j}, de i et de j pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbf{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On considère sur E le produit scalaire $\langle \cdot / \cdot \rangle$ défini par :

pour $(f, g) \in E^2$: $\langle f/g \rangle = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$.

On définit deux suites $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E par :

pour tout $t \in [0, \pi]$ $\quad e_0(t) = v_0(t) = 1$ et pour $k \geq 1$ $\quad e_k(t) = \sqrt{2}\cos(kt)$, $\quad v_k(t) = \cos^k(t)$.

Pour $m \in \mathbf{N}$ on note $H_m(e)$ le sous-espace vectoriel *vect* $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ (sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_j)_{j\in[[0,\, m]]}$).

On note, de même, $H_m(v)$ le sous-espace vectoriel *vect* $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$.

II.1. Calculer les produits scalaires $\langle e_j / e_k \rangle$ pour $(j, k) \in [\![0,m]\!]^2$.

II.2. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}$ la famille $(e_j)_{j\in[[0,\, m]]}$ est une base de $H_m(e)$.

II.3. Soit $m \in \mathbf{N}$; montrer que $v_m \in H_m(e)$, c'est-à-dire que $v_m = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} q_{i,m}\, e_i$; expliciter $q_{m,m}$ (on ne cherchera pas à calculer $q_{i,m}$ pour $0 \leq i \leq m$-1).

II.4. Démontrer l'égalité $H_m(e) = H_m(v)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

II.5. Pour $m \in \mathbf{N}$ on note d_m la distance de v_{m+1} au sous-espace vectoriel $H_m(e)$ (pour la distance associée au produit scalaire défini au début de la partie II).
Déduire de ce qui précède la valeur de d_m.

II.6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$; pour $(i, j) \in [\![0,n]\!]^2$ on note $v_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_{i,j}\, e_i$ et on pose alors :

$$Q_n = (q_{i,j}) \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$$

avec $(i, j) \in [\![0,n]\!]^2$.

II.6.1. Calculer $\det Q_n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

II.6.2. Calculer $\det W_n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Fin de l'énoncé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Suites et séries de fonctions
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Séries entières
- Nombres réels et suites numériques
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi