Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2001, filière PSI

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1 : forme de la Terre et potentiel de gravitation
- Problème 1 : précession de l'orbite des satellites
- Problème 2 : modèle discret de la charge d'un jet capillaire
- Problème 2 : modèle continu et longueur d'entrée

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2001/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SESSION 2001 PSI

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

PHYSIQUE 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99.

Le candidat doit respecter les notations des énoncés et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée. L'épreuve se compose de deux problèmes distincts. Pour ces deux problèmes, les résultats intermédiaires donnés dans le texte rendent les différentes questions relativement indépendantes. Le candidat aura cependant intérêt à lire complètement l'énoncé pour bien comprendre la démarche proposée.

PREMIER PROBLEME

Précession de l'orbite des satellites de la terre.

Description du problème

Sous l'effet de sa propre gravitation, la terre, comme tous les corps suffisamment massifs est grosso modo sphérique. Néanmoins, à cause de sa rotation, la planète est déformée: elle est aplatie aux pôles alors qu'un bourrelet apparaît à l'équateur. De cette déformation, il résulte une modification du champ de gravitation qui n'est plus le champ radial newtonien en $1/r^2$ qui caractérise les corps à symétrie sphérique. Ce champ modifié induit à son tour une perturbation de l'orbite des satellites (naturels ou artificiels) gravitant autour de la terre. Cette perturbation se réduit, dans le cas d'une orbite circulaire, à un mouvement de précession du plan de l'orbite. L'amplitude de la précession est d'autant plus grande que le satellite est plus proche de la terre. Le but de ce problème est de proposer une étude simplifiée afin de comprendre et éventuellement de prévoir une telle perturbation des orbites des satellites. On se restreint volontairement au cas particulier, mais fréquent en pratique, d'une orbite proche du cercle, cas qui permet de simplifier les calculs et de présenter les mécanismes essentiels du phénomène. Une application-test de notre modèle est proposée à la fin de l'étude.

Tournez la page S.V.P.

Si la terre était ronde...

Une masse ponctuelle m_0 située au point O exerce sur une masse test ponctuelle, de valeur unité et située au point N (N non confondu avec O) la force attractive (force de Newton):

$$\vec{g}(r) = -G\frac{m_0}{\vec{r}^2}\hat{r}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{ON}$ désigne le vecteur position de la particule test, $\hat{r}$ le vecteur normé suivant $\vec{r}$ et G la constante de gravitation universelle. Le champ vectoriel $\vec{g}$ est appelé champ de gravitation de la masse m_0.

1. Calculer l'expression du potentiel de gravitation $V(r)$ défini par :

$$\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\,V(r) \qquad \text{et} \qquad V(r=\infty) = 0\,.$$

Donner son expression en fonction de G, m_0 et r.

L'utilité de la définition des champs $\vec{g}$ et V réside dans l'observation que l'interaction simultanée de plusieurs masses (ceci s'étend au cas d'une distribution continue) sur la particule test est bien décrite par les champs obtenus en faisant la somme (l'intégrale) des différentes contributions. Nous allons utiliser cette propriété pour trouver une expression du potentiel gravitationnel de la terre.

On définit un référentiel T_0 ayant pour origine le centre d'inertie O de la terre et des axes portés par les vecteurs $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ formant une base orthonormée directe; $\vec{k}_0$ est porté par l'axe des pôles (sud vers nord) et $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$ sont situés dans le plan équatorial et pointant vers des directions fixes (étoiles lointaines). Dans tout le problème, on supposera T_0 galiléen.

Pour expliquer son aplatissement, la terre est bien modélisée par une goutte de liquide très visqueux et de masse volumique uniforme ρ. En l'absence de rotation propre et de toute influence extérieure, on admettra que, sous l'effet de sa propre gravitation, la goutte acquiert une forme sphérique (masse totale M, centre O, rayon R). Dans ce cas, le fluide est au repos dans le référentiel T_0.

2. On notera que la force de Newton exercée par une masse ponctuelle m_0 sur une masse unité, i.e. le champ de gravitation $\vec{g}(r) = -G\frac{m_0}{\vec{r}^2}\hat{r}$, présente une grande analogie formelle avec la force de Coulomb exercée par une charge ponctuelle q_0 sur une charge unité, i.e. le champ électrostatique $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{\vec{r}^2}\hat{r}$. Pour une distribution quelconque des charges, on rappelle que le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface fermée est égal au quotient des charges intérieures par ε_0 (théorème de Gauss). En transposant ce résultat au cas de la gravitation, donner les expressions des champs $\vec{g}$ et V en fonction de G, M, R et r ($0<r$). Représenter l'allure de la fonction $V(r)$.

3. Ecrire la loi de l'hydrostatique (forme vectorielle) à l'intérieur de la terre.

4. En déduire, par intégration, l'expression de la pression P à l'intérieur de la terre en fonction de G, M, R et r. On prendra la pression nulle à la surface du sol.

5. Donner l'expression de P_0, pression au centre de la terre en fonction de G, M et R. Calculer sa valeur numérique. On prendra R=6378 km, $G = 6{,}674\ 10^{-11}$ kg^{-1} m^3 s^{-2} et $GM = 3{,}986\ 10^{14}$ m^3 s^{-2}.

... Mais elle ne l'est pas ...

Sous l'action de sa rotation propre, la surface du fluide terre se déforme légèrement. Le champ de vitesse est le même que celui d'un solide en rotation autour de l'axe $\vec{k}_0$ avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{k}_0$. On se propose de trouver une équation approchée de la surface déformée.

6. Après avoir précisé un référentiel T pour lequel on peut appliquer la loi de l'hydrostatique, écrire cette loi sous forme vectorielle en prenant soin de bien définir les notations utilisées. On suppose dans cette question que la modification de forme induite est faible et que le champ de gravitation $\vec{g}$ est celui d'une sphère.

7. Intégrer l'équation précédente pour trouver l'expression de la pression P à l'intérieur de la terre en fonction de G, M, R, ω, r et α (co-latitude). On suppose que l'expression de P_0 trouvée auparavant en supposant la terre sphérique demeure valable.

8. En déduire l'équation de la surface terrestre : r_s étant la distance d'un point courant de cette surface à l'origine, on donnera l'expression de r_s en fonction de R, α et du paramètre $\varepsilon = \omega^2 R^3/GM$. Reconnaissez-vous une surface remarquable?

9. Préciser l'expression approchée de l'aplatissement relatif $\frac{\Delta R}{R}$ en fonction de ε (ΔR désigne la différence entre le rayon équatorial et le rayon polaire) puis les valeurs numériques de $\frac{\Delta R}{R}$ et de ΔR : on prendra $\omega = \frac{2\pi}{23h56mn} = 7{,}292\ 10^{-5}$ rad /s ; la valeur $23h56mn$ intervenant ici est la durée du jour sidéral, i.e. le temps mis par la terre pour faire un tour complet dans le référentiel galiléen.

Le potentiel gravitationnel n'est pas en 1/r...

Le potentiel de gravitation V de la terre peut maintenant être calculé en intégrant les contributions élémentaires sur le nouveau domaine obtenu en tenant compte de la rotation. Cependant, l'aplatissement terrestre étant faible, on assimile dorénavant la terre à une sphère homogène (S) (de centre O, rayon R, masse $M - m$) munie d'un renflement équatorial (E) représenté par un cercle (centre O, rayon R, masse m de valeur judicieusement choisie et uniformément répartie sur l'équateur vérifiant $m << M$).

Tournez la page S.V.P.

10. Pour ce modèle sphère + cercle et pour $r > R$, établir un développement du potentiel V selon les puissances croissantes de R/r. En déduire que V peut s'écrire sous la forme:

$$V(r,\alpha) = V_0(r) + V_1(r,\alpha) = V_0(r)\left[1 + B\cdot\frac{R^2}{r^2}\cdot(1-3\cos^2\alpha) + O(\frac{R^3}{r^3})\right]$$

Le terme principal : $V_0(r) = -\frac{A}{r}$

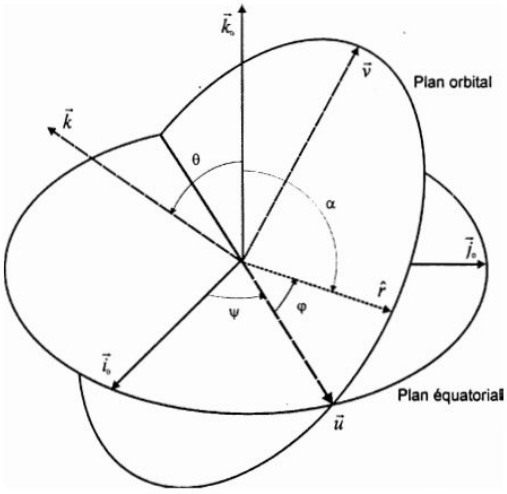
correspond au potentiel newtonien. Le second terme représente la correction due à l'aplatissement. Exprimer A en fonction de G et M puis B en fonction de M et m.
On rappelle le développement en séries entières :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)x^n}{n!} + ...$$ (rayon de convergence 1)

Et les satellites ne tournent pas rond.

Le terme B peut-être évalué directement en calculant l'intégrale de volume qui apparaît dans l'expression du potentiel de la terre avec rotation. Le calcul de cette intégrale étant un peu lourd dans le cadre de cette étude, on prendra la valeur de B obtenue de façon empirique en observant le mouvement des satellites : $B \cong 0{,}000541$; de plus, on admet que l'expression du potentiel trouvée à la question précédente est valable dès que $r > R$.

Etant donné la valeur de B, le potentiel V_1 apparaît comme un terme correctif, petit devant V_0, que l'on décide de négliger dans un premier temps ; ceci nous ramène à la situation « terre sphérique ». On considère dans ces conditions le mouvement le plus général d'un satellite ponctuel de masse unité dont le vecteur position est $\vec{r}$, la vitesse $\vec{U}$ dans le référentiel T_0.



11. Exprimer le moment cinétique du satellite $\vec{L}$ au point O par rapport au référentiel T_0. Montrer que la trajectoire du satellite est contenue dans un plan fixe (P).

Soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire normal à ce plan et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de même direction que $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}$, on note $\vec{v}$ le vecteur tel que le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ soit orthonormé direct. Le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ se déduit du trièdre $(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ par une rotation d'angle ψ autour du vecteur $\vec{k}_0$ suivie d'une rotation d'angle θ autour de $\vec{u}$. Les angles ψ (appelé précession) et θ (appelé nutation) définissent la direction du vecteur $\vec{k}$ et par conséquent le plan (P) de l'orbite du

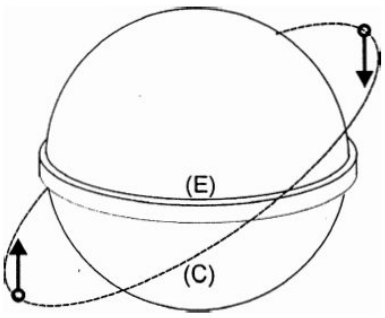
satellite. La position du satellite dans ce plan est repérée par ses coordonnées polaires r et φ (angle orienté par $\vec{k}$ entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{r}$).

12. Montrer que $L = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ et $E = -\frac{A}{r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$ sont deux constantes du mouvement et en déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par r.

13. La valeur de L étant fixée ($L \neq 0$), montrer que pour une certaine valeur de E, la trajectoire du satellite est un cercle (C) (centre O, rayon r) parcouru à vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ constante. Pour l'orbite circulaire, exprimer r, $\frac{d\varphi}{dt}$ et E en fonction de L et A uniquement. Donner la valeur r_g de r pour l'orbite géosynchrone (caractérisée par $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{2\pi}{T_s}$ où $T_s = 23h56mn$ est le jour sidéral, le temps que la Terre emploie pour faire un tour sur elle-même dans un référentiel de Galilée).

On considère la trajectoire (C) du plan (P) de la question précédente. On prend maintenant en compte le terme du potentiel $V_1(r,\alpha)$ provenant de l'aplatissement. Ce terme étant très petit, on suppose que la trajectoire demeure le cercle (C) de la question précédente (centre O, rayon r), mais que **l'orientation du plan (P)**, définie par le vecteur $\vec{k}$ change lentement au cours du temps. Le modèle proposé dans cette question et dans les suivantes n'a donc de sens que si les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}_0$ ne sont pas alignés, **ce qui exclut a priori le cas d'un satellite en orbite équatoriale** (on peut néanmoins montrer que les résultats dans ce cas particulier s'obtiennent comme cas asymptotique de ceux du cas général). On admet qu'au cours de ce mouvement, l'angle de nutation θ reste constant et que seul varie l'angle de précession ψ. Il s'ensuit que la période de précession du plan de l'orbite est grande devant la période de révolution du satellite sur son orbite. Dans ces conditions, on décide de représenter l'interaction gravitationnelle entre la terre et le satellite par le potentiel $\hat{V}(r,\theta)$ obtenu en moyennant le potentiel $V(r,\alpha)$ sur une période de révolution autour de la terre. On donne la relation : $\cos\alpha = \sin\varphi \ \sin\theta$.

14. Reporter cette expression dans celle du potentiel $V(r,\alpha)$, intégrer sur une révolution et montrer que le potentiel moyen s'écrit sous la forme : $\hat{V}(r,\theta) = V_0(r) + \hat{V}_1(r,\theta)$.
On exprimera $\hat{V}_1(r,\theta)$ en fonction de A, B, r, R et θ.



L'hypothèse précédente revient à imaginer que la masse (unité) du satellite est uniformément répartie sur sa trajectoire (C) ; le satellite est ainsi assimilé à un « cerceau » (C) de masse unité en rotation autour de son axe $\vec{k}$ avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$; le potentiel $V_0(r)$

Tournez la page S.V.P.

représente l'énergie gravitationnelle d'interaction d'une sphère de masse M (masse totale de la terre) et du « cerceau » (C) ; le potentiel $\hat{V}_1(r,\theta)$ représente l'énergie gravitationnelle d'interaction des deux « cerceaux » : le bourrelet équatorial (E) de la terre de masse m et le « cerceau » (C) du satellite. On conçoit aisément que cette dernière interaction se traduit par un couple $\vec{\Gamma}$ que la terre exerce sur le satellite et qui, en l'absence de rotation du cerceau (C), tendrait à aligner les axes des deux cerceaux. Ce couple est porté par la ligne de nœuds (vecteur directeur $\vec{u}$). La variation de $\hat{V}_1(r,\theta)$ entre deux valeurs de θ est l'opposée du travail du couple $\vec{\Gamma}$; on admettra la relation $d\hat{V}_1(r,\theta) = -\vec{\Gamma}.\vec{u}d\theta$.

15. Donner l'expression du couple $\vec{\Gamma}$ que la terre exerce sur le cerceau (C) du satellite en fonction de A, B, r, R et θ.

16. En admettant que l'expression du moment cinétique $\vec{L}$ trouvée à la question (11) demeure valable, appliquer le théorème du moment cinétique au cerceau (C) du satellite et en déduire la vitesse angulaire de précession $\dot{\psi}$ en fonction de B, r, R, θ et $\dot{\varphi}$ puis la précession $\Delta\psi$ de l'orbite au cours d'une révolution du satellite en fonction de B, r, R et θ.

A titre d'illustration, on considère le cas d'un satellite de cartographie : le satellite « SPOT » (trajectoire circulaire d'altitude 832 km avec $\theta = 98°45'$ et $\dot{\varphi} > 0$).

17. Calculer la valeur numérique de la précession $\Delta\psi$ de l'orbite au cours d'une révolution du satellite. Combien de jours solaires (le jour solaire est l'intervalle de temps entre deux passages successifs du soleil dans un même plan méridien, c'est à dire 24 heures) faut-il pour que la précession soit de 2π ? Un tel satellite est dit héliosynchrone : pourquoi ?

Fin du premier problème.

DEUXIEME PROBLEME

Cinétique de charge des gouttes formées par la brisure d'un jet capillaire.

Description du problème

Certains dispositifs d'impression industriels très rapides (marquage en série des œufs, des yaourts, des boîtes de conserve etc) dits à jet continu, utilisent la tendance naturelle que possède un jet liquide suffisamment fin (capillaire) à se briser en gouttelettes sous l'action de la tension superficielle. Dans ces applications, cette tendance « naturelle » est amplifiée, généralement par stimulation du réservoir contenant le liquide à projeter (encre, peinture…), par une variation rapide et périodique de pression produite par un quartz piézo-électrique. Cette excitation supplémentaire a le double avantage de diminuer la longueur du jet avant brisure et d'obtenir des gouttelettes bien calibrées.

Au voisinage du point de fragmentation du jet, on place une électrode de charge portée à un potentiel ajustable par rapport au réservoir (conducteur parfait de l'électricité) qui reste relié à la masse. Par influence électrostatique, cette électrode (supposée également parfaitement conductrice de l'électricité) permet de charger à travers le jet (de conductivité finie non nulle) les gouttes formées à la valeur de charge requise. Une fois les gouttes chargées, elles seront déviées de manière contrôlée par un système d'électrodes déflectrices avant d'atteindre le support d'impression (Fig. 1).

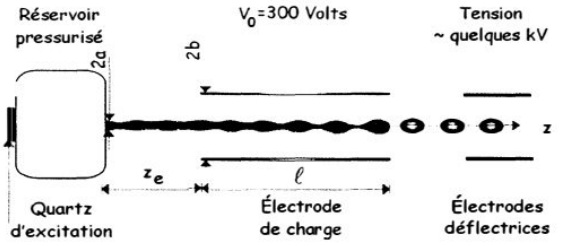


Figure 1: schéma de principe du dispositif d'impression

Le jet étudié ici est caractérisé par son rayon $a = 20\mu m$, sa vitesse moyenne $u = 20m.s^{-1}$ et sa résistivité électrique $\rho = 10\Omega.m$ (proche de celle de l'eau). L'électrode de charge est un cylindre de révolution **infiniment conducteur de l'électricité** (rayon $b = 300\mu m$, longueur $l = 2mm$, situé à la distance $z_e = 1mm$ de l'orifice de sortie du jet).

La fréquence d'excitation imposée par le quartz piézoélectrique est $f = 120kHz$, ce qui signifie que l'on fabrique 120.000 gouttes par seconde. Autrement dit, le temps nécessaire pour la formation d'une goutte est $T_f = 1/f = 8{,}33\mu s$. La question, objet de ce problème, est de savoir si on a le temps de charger les gouttes en si peu de temps.

Tournez la page S.V.P.

Modélisation

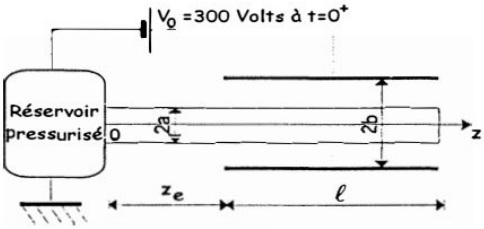


Figure 2: modèle du barreau avec longueur d'entrée z_e

L'électrode de charge et le jet constituent les armatures d'un condensateur dont nous allons étudier la cinétique de charge dans différents modèles. **Dans tous ces modèles**, nous nous restreindrons à l'étude de la cinétique de charge des gouttes dans le cas simple, mais emblématique, où l'électrode de charge est soumise à un échelon de potentiel :

L'électrode de charge et le jet sont au potentiel nul jusqu'au temps $t = 0$; puis, à partir de $t = 0^+$, l'électrode de charge (**infiniment conductrice**) est instantanément (et uniformément) portée au potentiel constant $V_0 = 300V$. L'**extrémité** $z = 0$ du jet reste constamment reliée à la masse (potentiel nul) par l'intermédiaire du réservoir (conductivité infinie). Nous simplifierons la géométrie du jet (Fig. 2) qui sera modélisé par un barreau cylindrique **fixe** (rayon $a = 20\mu m$, vitesse u nulle, résistivité électrique **non nulle** $\rho = 10\Omega.m$).

Dans une première approche, nous traiterons le cas $z_e = 0$, puis le cas d'une longueur d'entrée non nulle.

Charge d'un barreau cylindrique fixe avec $z_e = 0$

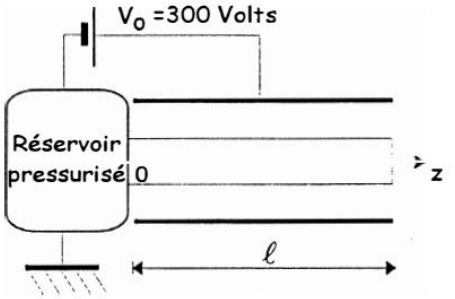


Figure 3: barreau et électrode à t=0+

Le mode opératoire étant celui décrit ci-dessus, on envisage d'abord le cas où la longueur d'entrée z_e est nulle (Fig. 3).

Ce cas fera à son tour l'objet de deux approches successives :

- la cinétique de charge sera d'abord étudiée par un modèle très simplifié, discret à un élément (Fig. 4).
- le cas intermédiaire du modèle discret à n éléments ne sera pas abordé ici : on passera directement au modèle de charge et résistance réparties (modèle continu) qui en constitue le cas asymptotique pour n grand.

$z_e = 0$: **Modèle discret à un élément.**

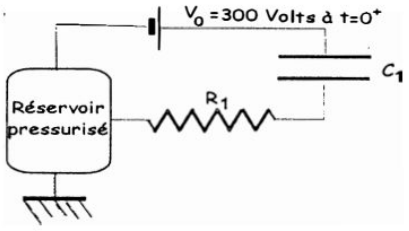


Figure 4: schéma équivalent sans longueur d'entrée z_e

Le système barreau + électrode de charge est équivalent au schéma électrique de la Fig. 4 : résistance et condensateur en série. La résistance R_1 est la résistance « effective », sorte de moyenne de la résistance vue par les charges qui se répartissent le long du barreau; en première approximation, on prendra donc pour R_1, la moitié de la résistance totale R du barreau de longueur l, soit :

$$R_1 = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\frac{\rho\, l}{\pi a^2}.$$

C_1 est la capacité d'un condensateur cylindrique dont les armatures sont constituées par l'électrode de charge et le barreau. On suppose, dans ce modèle discret à un élément, que la charge Q portée par le barreau est uniformément répartie et que chaque armature est une surface équipotentielle. En négligeant les effets de bords, le champ électrique $\vec{E}$ entre les électrodes est alors radial et ne dépend que du rayon r (distance à l'axe de révolution).

1. Dans ces conditions, appliquer le théorème de Gauss à une surface bien choisie et en déduire l'expression de $E(r)$ en fonction de Q, a, b, l et ε_0, permittivité diélectrique du vide.

On admet que la relation $dV(r) = -\vec{E}(r).d\vec{r}$ de l'électrostatique est applicable à ce problème.

2. En déduire la relation permettant de relier la différence de potentiel $(V_0 - V)$ aux bornes du condensateur à la charge Q du barreau ; en déduire l'expression et la valeur de C_1, capacité du condensateur, en fonction de a, b, l et ε_0. Pour les applications numériques, on prendra $\varepsilon_0 \cong \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\, F.m^{-1}$.

3. Donner l'expression du potentiel $V(t)$ du barreau en tenant compte de la condition initiale envisagée. Quelles sont l'expression et la valeur numérique de la constante de temps de charge t_1 du condensateur ? Au bout de quel temps t_c obtient-on 99% de la charge finale que l'on obtiendrait à $t = \infty$?

Tournez la page S.V.P.

$z_e = 0$: **Modèle résistance et charge réparties.**

On définit $r_1 = \frac{R}{l}$, la résistance par unité de longueur du barreau et $c_1 = \frac{C_1}{l}$, la capacité par unité de longueur du condensateur cylindrique. On simplifie le problème en considérant un problème unidimensionnel où le potentiel et l'intensité du courant axial traversant le barreau peuvent être représentés respectivement par des fonctions de la forme $V(z,t)$ et $I(z,t)$. Corrélativement, on remarquera que la densité de charge apparaissant à la surface du barreau peut s'écrire $Q(z,t)$. On considère une tranche de barreau comprise entre les abscisses z et $z+dz$.

4. Appliquer la loi d'Ohm entre les bornes z et $z+dz$ de cette tranche.

5. Ecrire le bilan traduisant la conservation de la charge électrique pour ce volume (on admet que l'expression de C_1 trouvée précédemment demeure valable).

6. En déduire l'équation de diffusion du potentiel dans le barreau :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exprimer le coefficient de diffusion α en fonction de r_1 et c_1 puis de l et t_1.

L'équation de diffusion étant linéaire, on cherche la solution sous la forme d'une série de termes (modes) à variables séparées:

$$V(z,t) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p(z,t) \quad \text{avec} \quad V_p(z,t) = Z_p(z).T_p(t)$$

7. En reportant l'expression d'un mode quelconque dans l'équation de diffusion, donner la forme générale des fonctions $Z_p(z)$, $T_p(t)$ et $V_p(z,t)$.

8. En exprimant la condition sur le potentiel à la frontière $z=0$ pour chacun des modes $V_p(z=0,t)$, donner la forme de $Z_p(z)$ et la nouvelle expression de la série $V(z,t)$.

9. Le courant électrique $I(z,t)$ se décompose de façon analogue au potentiel en une série de modes :

$$I(z,t) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(z,t)$$

Par application de la continuité du courant électrique et de la loi d'Ohm à chaque mode, déduire de la condition sur $I_p(z=l,t)$, la relation satisfaite par $\frac{\partial V_p(z,t)}{\partial z}(z=l,t)$. Donner la nouvelle expression de la série $V(z,t)$.

10. Ecrire la condition initiale $V(z,t=0^+)$ pour $z \in]\,0,l\,[$ satisfaite par la série de la question précédente. On prolonge cette relation sur l'ensemble des réels en définissant la fonction périodique $f(z)$ (impaire) de période $4l$ telle que :

Pour $z \in]\,0,2l[$: $f(z) = V_0$; pour $z \in]\,-2l,0[$: $f(z) = -V_0$ et $f(0) = f(2l) = 0$

En considérant le développement de $f(z)$ en série de la forme $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \sin(k_p z)$, déduire l'expression finale de la solution :

$$V(z,t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \exp[-(2p+1)^2 \frac{\pi^2 \alpha}{4l^2} t] \sin[(2p+1)\frac{\pi z}{2l}]$$

11. En examinant l'allure de différents termes de cette expression, il apparaît que l'un d'entre eux est rapidement prépondérant. En déduire l'expression asymptotique de la fonction $V(z,t)$ et la valeur numérique de la constante de temps de charge t_1' du barreau. Au bout de quel temps t_c' obtient-on, au bout du barreau (c'est à dire à $z=\ell$), 99% de la charge finale que l'on obtiendrait à $t = \infty$?

12. Comparer t_c' à t_c : conclusion quant à la validité du modèle discret à un élément par rapport au modèle continu? Que vaut en fait la résistance « effective » du barreau R_{eff} définie par la relation $t_1' = R_{eff}\, C_1$ et qui avait été approchée par $R_1 = \frac{R}{2}$?

13. Comparer la vitesse du front de charge $v \approx \frac{l}{t_c'}$ à la vitesse du jet $u = 20 m/s$. Conclusion quant à l'une des hypothèses du modèle ?

Charge d'un barreau cylindrique fixe avec $z_e \neq 0$

14. Pour tenir compte de l'existence d'une longueur d'entrée z_e non nulle, on modifie le modèle précédent en ajoutant, en série avec R_1 (dont l'expression est maintenant celle de R_{eff}), la résistance R_e correspondant à la résistance d'une longueur z_e de barreau (Fig. 5). Exprimer la nouvelle constante de temps de charge t_1'', d'abord en fonction de $R_1' = R_e + R_1$ (avec $R_1 = R_{eff}$) et C_1, puis en fonction de ρ, z_e, l, a, b et ε_0 .

Tournez la page S.V.P.

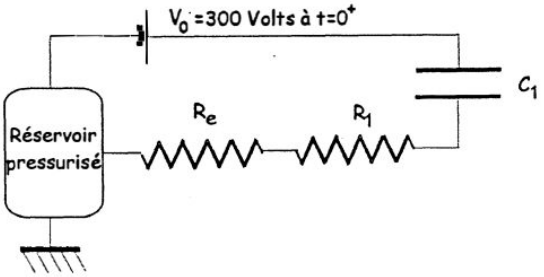


Figure 5: schéma équivalent avec longueur d'entrée z_e

15. Au bout de quel temps t_c'' obtient-on 99% de la charge finale que l'on obtiendrait à $t = \infty$? Comparer t_c'' à T_f : conclusion quant à la possibilité de charger les gouttes ?

16. Comment varierait la valeur de t_c'' si on prenait en compte la forme réelle du jet (allure analogue à celle de la Fig. 1) avec ses pincements et ses renflements? Commenter.

Fin du second problème.

Fin de l'épreuve.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Électrostatique : formulation locale et condensateur
- Description des fluides : statique, cinématique et viscosité
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Régimes transitoires
- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- onservation de la charge

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi