Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2003, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : les fonctions t_n(x) = cos(n arccos x)
- Partie II : structure préhilbertienne et formule exacte à trois points
- Partie III : méthode de quadrature et approximation

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2003/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CCP 2003 – PSI – MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0 et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Etant donné un entier naturel n, on note $[\![0, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$.

On note $\mathbf{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_k[x]$ le sous-espace de $\mathbf{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k. On identifiera le polynôme $P \in \mathbf{R}[x]$ avec la fonction polynôme associée.

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{R}$ l'espace des restrictions à $[-1, 1]$ des polynômes de $\mathbf{R}[x]$ et on note $\mathcal{R}_k$ l'espace des restrictions à $[-1, 1]$ des polynômes de $\mathbf{R}_k[x]$. Par abus, on appellera polynôme une fonction de $\mathcal{R}$.

Le but du problème est de définir une méthode de calcul approché d'une famille d'intégrales.

Dans la partie I, on étudie une familles de polynômes. La partie II utilise une structure d'espace préhilbertien réel de l'espace $\mathcal{C}$, pour obtenir une formule de calcul exacte de certaines intégrales. La partie III conduit à la méthode de calcul approché annoncée.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $t_n \in \mathcal{C}$ par : pour tout $x \in [-1, 1]$, $t_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

PARTIE I

1. Simplifier les expressions de t_0, t_1, t_2, t_3 et constater que ces fonctions ont des expressions polynomiales, que l'on explicitera.

2. Tracer, sur un même dessin, les graphes de t_0, t_1, t_2 et t_3. Préciser les racines et les extremums de chaque fonction.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\theta_k = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer les racines de la fonction t_n. Montrer que les racines de t_n sont deux à deux opposées.

4. On suppose l'entier $n \geq 2$. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.

4.1 Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}$.

4.2 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$.

Pour $x \in [-1, 1]$, le changement de variable bijectif $\theta = \arccos x$, permet d'écrire $t_n(x) = \cos(n\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

5. Pour $n \geq 1$, exprimer $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x)$ en fonction de x et de $t_n(x)$.

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction t_n est la restriction à l'intervalle $[-1,1]$ d'un polynôme T_n de $\mathbf{R}[x]$. Préciser le degré de T_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n n'a pas de racine complexe non réelle.

PARTIE II

1. Soit f une fonction de $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

2.1 Calculer I_0 et I_1.

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} (on pourra, entre autre méthode, utiliser le changement de variable $\theta = \arccos x$).

2.3 En déduire les valeurs de I_2 et I_4. Quelle est la valeur de I_{2p+1} pour $p \in \mathbf{N}$?

3. Définition d'une structure préhilbertienne réelle sur $\mathcal{C}$.

3.1 Montrer que l'application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2 Montrer que la famille de fonctions t_p, pour $p \in [\![0,n]\!]$, est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_n$.

Calculer la norme de chaque fonction t_p.

3.3 Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0.$$

4. On veut montrer qu'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 uniques, tels que pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$, on a

$$(1) \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.1 On suppose que l'égalité (1) est satisfaite par tout $P \in \mathcal{R}_5$. En prenant successivement les polynômes P définis par $P(x) = 1$, $P(x) = x$, $P(x) = x^2$, déterminer les réels a_0, a_1, a_2.

4.2 Montrer que le triplet (a_0, a_1, a_2) trouvé convient pour les polynômes P définis par $P(x) = x^4$ puis $P(x) = x^5$.

En déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$.

5. Calcul d'une intégrale.

5.1 Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

5.2 Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x$, à l'aide du changement de variable $t = 2x-1$ et de la formule (1).

PARTIE III

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Etant donné des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}$, on note $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(x_k)$ où $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$.

On se propose de montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ uniques, tels que pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_{n-1}$, on ait :

$$(2) \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = S_n(P).$$

1. On suppose que l'égalité (2) est satisfaite pour tout $P \in \mathcal{R}_{n-1}$. En prenant successivement pour polynômes P les monômes $1, x, \ldots, x^{n-1}$, montrer que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont les solutions d'un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est non nul (on ne demande pas le calcul des intégrales qui interviennent dans le second membre du système).

2. On suppose qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que, pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, la relation (2) soit vérifiée par les fonctions t_p.

2.1 Montrer qu'alors la relation (2) est vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_{n-1}$.

2.2 En utilisant ce qui précède, en particulier **I.4** et **II.3**, montrer que les a_k sont tous égaux et calculer leur valeur.

2.3 On suppose que les a_k ont la valeur trouvée en **2.2**. Soit P un polynôme de $\mathcal{R}_{2n-1}$.
En écrivant la division euclidienne de P par t_n (sur $[-1, 1]$), montrer que P vérifie (2).

Etant donné une fonction $g \in \mathcal{C}$, on note $D_n(g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x - S_n(g)$ et on note $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}$.

3.1 Soit $P \in \mathcal{R}$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 > 0$, qui dépend de P, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty$.

3.2 En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on prend $f(x) = e^x$. Soit m un entier de $\mathbf{N}^*$.

4.1 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m \cdot m!}$.

4.2 Déterminer un polynôme P de degré m tel que $\|f - P\|_\infty \leq \dfrac{1}{m \cdot m!}$.

4.3 Justifier que $S_4(f)$ fournit une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ à 10^{-3} près.

4.4 Calculer cette valeur approchée.

Fin de l'énoncé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Nombres complexes et trigonométrie
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Structures algébriques usuelles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Espaces vectoriels normés
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi